EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS II **HOJA 2**

1) Calcula los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} .$$

2) Resuelve las ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+2 & 4x+8 & x+2 \\ x+1 & x+1 & x+1 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ x & -1 & x \\ x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3x-6 & 4 & x+4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3) Verifica las siguientes igualdades:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = a \cdot b ; \quad \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ x & x & c \\ x & x & x \end{vmatrix} = x \cdot (x-a) \cdot (x-c)$$

4) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula los siguientes determinantes sin desarrollarlos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

5) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 5$, calcula los siguientes determinantes sin desarrollarlos:

$$\begin{vmatrix} 2a & 3b & 4c \\ 2x & 3y & 4z \\ 2u & 3v & 4w \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+y & c+z \\ 2a+u & 2b+v & 2c+w \end{vmatrix}$$

6) Demuestra las siguientes igualdades:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a).(c-a)\cdot(c-b) \ ; \qquad \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3 .$$

7) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

8) Demuestra la igualdad:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\cdot(a-1)^2$$

9) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$

10) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Si $B = 2A - I$, demostrar que B^2 es la matriz unidad.