## EJERCICIOS MATRICES Y DETERMINANTES HOJA 3

1.- Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Calcular:

**a) A-B+C** **Sol:** $\begin{pmatrix}5 & -5 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ ; **b)A-B-(C+D)** **Sol:** $\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ -4 & -4 & 6\end{pmatrix}$

**c)2A-3B** **Sol:** $\begin{pmatrix}11 & -8 & 6\\ -6 & -2 & 11\end{pmatrix}$ ; **d)A-2B+3C** **Sol:** $\begin{pmatrix}10 & -15 & 3\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$

**e)3(A+B)-C** **Sol:** $\begin{pmatrix}-7 & 21 & 9\\ 3 & -4 & 10\end{pmatrix}$; **f)** $A\cdot B^t$ **Sol:** $\begin{pmatrix}5 & -1\\ -4 & -4\end{pmatrix}$

2.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ comprueba que $(A-I)^2=0$ (I es la matriz identidad)

3.-Calcula: $(x\quad y\quad z).\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ **SOL:** $(ax^2+by^2+cz^2)$

4.- Halla las potencias enésimas de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

5.- Determina $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ de modo que A·B=B·A, siendo $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

6.- Decimos que una matriz cuadrada A es **idempotente** cuando $A^2=A$. Comprueba que la matriz $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$ es idempotente. Determina las condiciones que debe cumplir una matriz cuadrada de orden dos para que sea idempotente.

7.- Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2+A=I$. Calcula la matriz $(A+I)^2-(A+I)$ (I es la matriz identidad).

8.-Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2=A$. Si $B=2A-I$. Demostrar que $B^2$ es la matriz unidad.

9.- Demostrar sin desarrollar (aplicando las propiedades de los determinantes), que:

a) $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & a+c\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}=0$

b) $\begin{vmatrix}a^2 & a & bc\\ b^2 & b & ac\\ c^2 & c & ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^3 & a^2 & 1\\ b^3 & b^2 & 1\\ c^3 & c^2 & 1\end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 5

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$

e) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = (a - b)(a - c)(b - c)$

g) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

h) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

10.- Halla los valores de k para los que la matriz

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa. Calcula su inversa para k=1.

11.- Determina la matriz A y el número real x de modo que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot A \qquad \text{con } A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12.- ¿Qué valores de **a** hacen que la siguiente matriz no tenga inversa?

$A = \begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-a & a+3 & a+7 \end{pmatrix}$ Razona la respuesta

13.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcula: a) La matriz inversa de las matrices I+A y I-A.

b) $(I+A)(I-A)^{-1}$

14.- Calcula, si es posible, las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

15.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 4 & b \end{pmatrix}$. Calcula a y b para que su rango sea 1.

16.- Discutir según los valores de p el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & p & -1 & 2 \\ 2 & -1 & p & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$