EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS II **HOJA 4**

1) Sea $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Halla el valor o valores de a para los que la matriz A no tiene inversa. Halla A^{-1} para $a=2$.

2) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determina si A y B son invertibles y, en su caso, calcula la inversa.

(b) Resuelve la ecuación matricial $BA-A^2=AB-X$.

3) Resuelve la ecuación $AX+B=C$, donde $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calcula, si existen, la matriz inversa de A y la de B.

(b) Resuelve la ecuación matricial $AX+B=A+I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

5) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz P que verifica $AP-B=C^t$ (C^t es la traspuesta de C).

6) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Calcula, si existe, la inversa de A.

(b) Calcula las matrices X e Y que satisfacen las ecuaciones matriciales $XA=A+2B$ y $AY=A+2B$.

7) Considera $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?

(b) Resuelve, para $m=2$, el sistema de ecuaciones $AX=C$.

8) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.

(b) Para $\alpha=1$, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial $AX=B$.

9) (a) Calcula la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior,

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{array}\right\}$$

10) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

(a) Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.
(b) Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.
(c) Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$.

11) Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X - B = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

12) Determina la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = X - B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

13) Resuelve la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$$

14) Sean I la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Encuentra los valores de m para los cuales se cumple $(A - I)^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 2.

(b) Para $m = 2$, halla la matriz X tal que $AX - 2A^T = O$, donde A^T denota la matriz traspuesta de A.

15) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Indica los valores de m para los que A es invertible.
(b) Resuelve la ecuación $XA - B^t = C$ para m = 0. (B^t es la matriz traspuesta de B)