EJERCICIOS ANÁLISIS ***HOJA 9***

1) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida por $f(x) = (x^2 + 3x + 1).e^x$, en el punto de abscisa x=0. (Sol: y= 4x+1)

2) En la función $f(x) = mx^3 + 2x^2 + 3x - 1$ ¿cuál debe ser el valor de m para que la pendiente de la recta tangente a su gráfica en x= -1 valga 11? (Sol: m= 4)

3) ¿ En qué puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 - 8x$, la tangente es horizontal? (Sol: (-2,12) y $\left(\frac{4}{3}, -\frac{176}{27}\right)$)

4) Dada la función $f(x) = (x^2 + 1).\text{sen } x$, escribe la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa 0. (Sol: y= x)

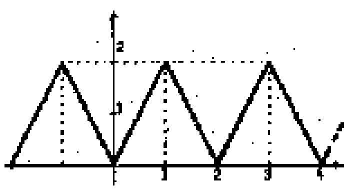
5)Se considera la función $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$. Determínense las ecuaciones de las tangentes a su gráfica que sean paralelas a la bisectriz del primer cuadrante. (Sol: y= x+1; y= x+5)

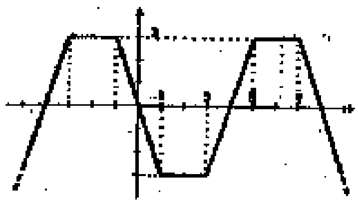
6) En cada una de las siguientes funciones, hallar la derivada e indicar los puntos angulosos:

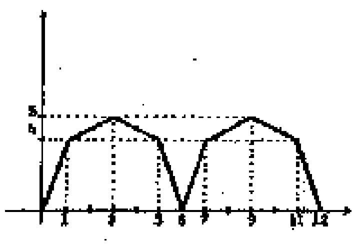
$f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ $\quad g(x) = \begin{cases} 2x + 7 & x \le 1 \\ 4x^2 + 6x - 1 & x > 1 \end{cases}$ $\quad h(x) = \begin{cases} -2x - 1 & x < -1 \\ x^2 & x \ge -1 \end{cases}$

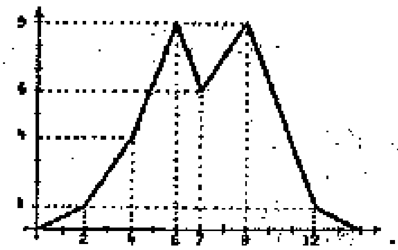
7) Determinar los puntos de la curva $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta y = 12x + 5. (Sol: (1,16) y (-7,176))

8) En los siguientes ejercicios se da la gráfica de una función f. Se pide indicar los puntos en los que f no es derivable, hallar la función derivada f' y dibujar su gráfica.









9) Hallar los valores de a y b para que la función *f* sea derivable en 0.

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{Ln}(e + \mathrm{sen}\ x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de *f* en el punto de abcisa -π. (Sol: b=1; a=1/e)

10) Se sabe que **y=2x+n** es la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + mx$ en el punto de abscisa 3. Calcula el valor de n. (Sol: n= -9)

11) Estudia, según los valores de a y b la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 2 \\ ax + 3 & x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \leq 0 \\ x^2 + bx + a & x > 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & x > 2 \end{cases}$

d) $j(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & x > 0 \\ 3x - 5 & x \geq 0 \end{cases}$

12) Halla las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \mathrm{Ln}\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

b) $f(x) = \mathrm{arctg}\ e^x - \mathrm{Ln}\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^2}$

d) $f(x) = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} - \cot\dfrac{x}{2}$

e) $f(x) = \mathrm{Ln}\sqrt{\dfrac{1 - \mathrm{sen}\ x}{1 + \mathrm{sen}\ x}}$

g) $f(x) = \mathrm{arcsen}\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$

13) La recta de ecuación y =2x-7 es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ en el punto (1,f(1)). Halla a y b. (Sol: a=7, b= -15)

14) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ Halla a para que sea continua en R (Sol:a=1)

15) Dada la función $f(x) = |x - 1|^3 + ax + b$

Demostrar que es derivable en x=1.

16) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$ ¿Es continua en x=0? ¿Es derivable en x=0? ¿Es continua la función derivada de f en x=0? Razona las respuestas.

17) La función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de derivada nula en (1,1), que no es un extremo relativo. Halla razonadamente a, b y c. (Sol: a=-3, b=3, c=0)

18) Halla la derivada, los máximos y los mínimos de la función:
$f(x) = |x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 1|$ (Sol: mínimo (1,0))

19) Sea f la función dada por $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ para $|x| \neq 1$
a) Determina sus asíntotas.
b) Determina sus extremos locales e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Realiza un esbozo de su gráfica.

20) Máximos y mínimos, si los tiene, de la función $y = |4 - x^2|$ sobre $-3 \leq x \leq 3$

21) Halla a para que se cumpla que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \ln(1+x)}{1 - \cos ax} = 8$ (Sol: $a = \pm\dfrac{1}{2}$)

22) Dos postes de 12 y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable uniendo un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de éstos. ¿En qué posición debe situarse el punto en el suelo para que la longitud total del cable sea mínima?

23) Un triángulo isósceles de perímetro 10m gira alrededor de la altura relativa al lado desigual y engendra un cono. Hallar sus lados para que el cono tenga volumen máximo.

24) Se quiere cercar un campo rectangular mediante una valla, aprovechando un muro ya existente. Se sabe que la valla del lado opuesto del muro cuesta 300 ptas el metro y la de los otros dos lados 100 ptas el metro. Si el presupuesto disponible es de 300000 ptas, halla el área del mayor recinto que pueda cercarse.

25) Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 8 m de radio. (Sol: cuadrado de lado $8\sqrt{2}$ m)

26) En un terreno llano se desea acotar una parcela rectangular usando 80 m de tela metálica para vallarla, pero dejando en uno de sus lados una abertura de 20 m sin vallar. Halla las dimensiones de la parcela rectangular de área máxima que pueda acotarse de esa manera y el valor de dicha área. (Sol:25x25,A=625m^2)

27) De todos los conos cuya generatriz mide 10 cm ¿cuánto mide la altura del que tiene mayor volumen? (Sol: $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm)

28) La parte escrita de la página de un libro ocupa 400cm^2, los márgenes superior e inferior deben ser de 3cm de ancho y los laterales de 2cm. Se pide calcular las dimensiones de la página para que el gasto de papel sea mínimo. (Sol: 30,5x20,3 cm)

29) Halla las medidas de un depósito en forma de prisma cuadrangular regular descubierto, con una capacidad de 32m^3, de modo que la superficie de metal empleado sea mínima. (Sol: lado de la base 4 m, altura 2 m)

30) Una ventana tiene forma de rectángulo culminado con un semicírculo. El perímetro de la ventana es de 6m. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que deje pasar el máximo de luz? (Sol: 1,68m anchura, 0,84 m altura, semicírculo de radio 0,84 m)

31) La función $f(x)=\dfrac{ax^4+bx^3+cx^2-1}{x^2+bx-15}$ tiene por asíntota la recta de ecuación y=2x+1. Halla los valores de a, b y c y las otras asíntotas. (Sol: a=0, b=2, c=5; A.V.:x= -5, x= 3)

32) La gráfica de la función $f(x)=e^{ax^2+bx+c}$ pasa por el punto (1,1) y presenta inflexión en (0,1). Halla los valores de a, b y c. (Sol: a= -2, b= 2, c= 0)

33) Sea la función f definida por $f(x)=\begin{cases} ax-3 & si\ x<4 \\ -x^2+10x-b & si\ x\geq 4 \end{cases}$ Determina los números reales a y b para que f(x) cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo [0,6]. (Sol: a= 2, b= 19)

34) Estudia la continuidad, derivabilidad, crecimiento y extremos relativos de la función $f(x)=x^2-2|x|+2$

35) Se considera la función: $f(x)=\begin{cases} e^{2x-1} & x>\dfrac{1}{2} \\ 2-a.\cos(2x-1) & x\leq\dfrac{1}{2} \end{cases}$

a) Halla el valor de **a** para que f sea continua en R.
b) Para dicho valor de **a** ¿Es f derivable en R? (Sol: a= 1, NO)

36) Dada la función $f(x)=|x-1||x+1|$. Determina los puntos donde f es derivable y halla sus máximos y sus mínimos locales. (Sol: Derivable en $\Re-\{-1,1\}$;Min(-1,0),(1,0),Max(0,1))

37) Considera la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x<0 \\ ax+b & si\ 0\leq x\leq 3 \\ x-5 & si\ x>3 \end{cases}$

a) Halla a y b
b) Estudia la derivabilidad de f
c) ¿Es f decreciente en el intervalo (-1,1)? Justifica la respuesta.

38) Halla los valores a, b, c y d para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ verifique:
a) La recta tangente en el punto (0,1) es y=2x+1.
b) Su recta tangente en el punto (1,-1) es paralela al eje OX.

39) Estudia y representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y=\ln(x^2-x)$ b) $y=\dfrac{x^2}{(x+3)^2}$ c) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ d) $y=e^x(x-1)$