GLOBAL ÁLGEBRA

1) Opera y simplifica: $\dfrac{x}{x^2-9}+\dfrac{3}{x^2+5x+6}-\dfrac{x}{x+2}$ (1 punto)

2) Resuelve las siguientes ecuaciones: (3 puntos)

a) $49^x - 10 \cdot 7^x + 21 = 0$

b) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}=-1$

c) $\dfrac{x-1}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2(x+1)}$

3) Halla un polinomio que tiene por raíces 1 –2 y cero, sabiendo que es de grado 4, y que su coeficiente principal es –5.

(1 punto)

4) Resuelve las siguientes inecuaciones: (3 puntos)

a) $\dfrac{x^2-4+x}{x+2}<1$

b) $\left|x^2-7\right|\leq 5$

5) Resuelve los sistemas:

b) $\begin{cases} 3^{2x} \cdot 81^y = 27 \\ 2^x = \dfrac{1}{2^y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ \ln x - \ln y = 1 \end{cases}$ (2 puntos)

Soluciones

1) Debemos hallar el mínimo común múltiplo:

$x^2-9=(x-3)(x+3);$

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ El m.c.m. es (x-3)(x+3)(x+2)

$x+2=x+2$

$$\frac{x}{x^2-9}+\frac{3}{x^2+5x+6}-\frac{x}{x+2}=\frac{x(x+2)+3(x-3)-x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)(x+2)}=$$

$$\frac{x^2+2x+3x-9-x^2+9x}{(x-3)(x+3)(x+2)}=\frac{x^2+2x+3x-9-x^3+9x^2}{(x-3)(x+3)(x+2)}=\frac{-x^3+x^2+14x+9}{(x-3)(x+3)(x+2)}$$

El polinomio del numerador, no tiene ninguna raíz en común con el polinomio del denominador por tanto, no podemos simplificar la fracción algebraica.

2) a) 49^x -10·7^x +21=0 Hacemos el cambio $7^X=t$.

$$t^2-10t+21=0\rightarrow\begin{cases}t=7\\t=3\end{cases}$$

Por tanto:: $7^X=7\rightarrow x=1$; $7^X=3\rightarrow x\log 7=\log 3\rightarrow x=\frac{\log 3}{\log 7}$

b) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}=-1\rightarrow\sqrt{3x+2}=-1+\sqrt{x+3}$ elevamos ambos miembros al cuadrado: $3x-2=1-2\sqrt{x+3}+x+3\rightarrow 2\sqrt{x+3}=-2x+6$ elevamos ambos miembros al cuadrado: $4(x+3)=4x^2+36-24x\rightarrow 4x^2-28x+24=0\rightarrow\begin{cases}x=6\\x=1\end{cases}$ Comprobando las soluciones, vemos que solo es válida x =1

c) $\frac{x-1}{x^2-x}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x+1)}$

$x^2-x=x(x-1);$

$x^2-1=(x+1)(x-1)$ m.c.m.=2x(x+1)(x-1)

$2(x+1)=2(x+1)$

$$\frac{x-1}{x^2-x}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x+1)}=\frac{2(x+1)-2x}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{x(x-1)}{2x(x+1)(x-1)}\rightarrow$$

$2x+2-2x=x^2-x\rightarrow x^2-x-2=0\rightarrow\begin{cases}x=2\\x=-1\end{cases}$ Comprobando, solo es válida x =2

3) Halla un polinomio que tiene por raíces 1 –2 y cero, sabiendo que es de grado 4, y que su coeficiente principal es –5.
Este polinomio factorizado será: $-5(x+2)(x-1)x^2$

4) a) $\frac{x^2-4+x}{x+2}<1\rightarrow\frac{x^2-4+x}{x+2}-1<0\rightarrow\frac{x^2-4+x-(x+2)}{x+2}<0\rightarrow\frac{x^2-6}{x+2}<0$

Para resolver esta inecuación debo empezar por resolver las ecuaciones que resultan de igualar a cero el numerador y el denominador:

$$x^2-6=0\rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{6}\approx 2{\acute{}}4\\ x=-\sqrt{6}\approx -2{\acute{}}4\end{cases}\qquad\qquad x+2=0\rightarrow x=-2$$

A la vista de las soluciones debemos probar el signo de la función en los intervalos $(-\infty,-\sqrt{6}),(-\sqrt{6},-2),(-2,\sqrt{6}),(\sqrt{6},+\infty)$.

Tomando un valor para x encada uno de los intervalos, vemos que la expresión $\dfrac{x^2-6}{x+2}$ es negativa en $\left(-\infty,-\sqrt{6},\right)\cup\left(-2,\sqrt{6}\right)$

$\left|x^2-7\right|\le 5\Rightarrow -5\le x^2-7\le 5\rightarrow$ Esto equivale al siguiente

sistema: $\begin{cases}x^2-7\le 5\rightarrow x^2\le 12\\ x^2-7\ge -5\rightarrow x^2\ge 2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2-12\le 0\\ x^2-2\ge 0\end{cases}$ Para resolverlo, resolvemos las

ecuaciones $\left\langle\begin{array}{l}x^2-12=0\rightarrow x=\left\langle\begin{array}{l}\sqrt{12}\\ -\sqrt{12}\end{array}\right.\\ x^2-2=0\rightarrow x=\left\langle\begin{array}{l}\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\end{array}\right.\end{array}\right.$

Para obtener la solución del sistema debemos obtener las soluciones de las inecuaciones $x^2-12\le 0$ y de la inecuación $x^2-2\ge 0$

Para solucionar la primera probamos en los intervalos de la recta

$(-\infty,-\sqrt{12}),(-\sqrt{12},\sqrt{12}),(\sqrt{12},+\infty)$.

Vemos que x^2-12 es negativa en $(-\sqrt{12},\sqrt{12})$

Para solucionar la segunda probamos en los intervalos de la recta

$(-\infty,-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2}),(\sqrt{2},+\infty)$ Vemos que x^2-1 es positiva en

$(-\infty,-2)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ =Sol $_2$

La solución del sistema será la intersección de ambas soluciones:

Sol= Sol $_1\cap$ Sol $_2=(-\sqrt{12},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{12})$

$$\rightarrow\begin{cases}3^{2x}\cdot(3^4)^y=3^3\\ 2^x=2^{-y}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x+4y=3\\ x=-y\end{cases}\rightarrow -2y+4y=3\rightarrow -2y=3\rightarrow y=\frac{-3}{2};x=\frac{3}{2}$$

$$\text{b)}\begin{cases}\ln x+\ln y=0\\ \ln x-\ln y=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\ln x\cdot y=\ln 1\\ \ln\dfrac{x}{y}=\ln e\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x\cdot y=1\\ \dfrac{x}{y}=e\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{x}\rightarrow y=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{e}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{e}}\end{array}\right.\\ \dfrac{x}{\frac{1}{x}}=e\rightarrow x^2=e\rightarrow x=\left\langle\begin{array}{l}\sqrt{e}\\ -\sqrt{e}\end{array}\right.\end{cases}$$

Sólo es válida, la solución x= $\sqrt{e}$ $y=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ya que los negativos no tienen logaritmo