CONTROL FUNCIONES

1. Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x+3}$, $g(x)=\dfrac{4x}{x-1}$, $h(x)=2x^3-3$

Halla: (2 p)

a) $f\circ g$ y $g\circ f$

b) La función inversa de h(x), h^{-1}, comprueba el resultado y halla su dominio.

c) La función inversa de g(x), g^{-1}, comprueba el resultado y halla su dominio.

2. Halla los dominios de las siguientes funciones: (2 p)

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-3}}$ b) $g(x)=e^{\frac{2}{x^2-x}}$ c) $h(x)=\log\left(4x-x^2\right)$

3. Representa gráficamente (sin hacer tabla de valores) la función $y=\left|\dfrac{3}{x-2}\right|$

Escribe sus características: Dominio, recorrido, asíntotas, continuidad, etc.

(1,5 p)

4. Representa gráficamente la siguiente función (sin hacer tabla de valores) y escribe sus características:

$$f(x)=\begin{cases}-3 & \text{si } x<-2\\ x-1 & \text{si } -2<x<1\\ -x^2+5x-4 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$ (2,5 p)

5. Representa gráficamente las siguientes funciones, sin hacer tabla de valores, es decir, hallando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes y demás características. $y=\sqrt{x-2}$, $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ (2 p)

SOLUCIONES

1. Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x+3}$, $g(x)=\dfrac{4x}{x-1}$, $h(x)=2x^3-3$

Halla:

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left(\dfrac{4x}{x-1}\right)=\sqrt{\dfrac{4x}{x-1}+3}=\sqrt{\dfrac{4x}{x-1}+3}=\sqrt{\dfrac{7x-3}{x-1}}$

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[\sqrt{x+3}\right]=\dfrac{4\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-1}$

b) $y=2x^3-3\rightarrow$ cambiamos: $x=2y^3-3\rightarrow x+3=2y^3\rightarrow y^3=\dfrac{x+3}{2}$

$y=\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{2}}\rightarrow h^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{2}}$ $\quad$ $\mathrm{Dom}(h^{-1})=R$

Comprobación:

$(h\circ h^{-1})(x)=h\left[h^{-1}(x)\right]=h\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{2}}\right)=2\left(\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{2}}\right)^3-3=2\cdot\dfrac{x+3}{2}-3=x+3-3=x$

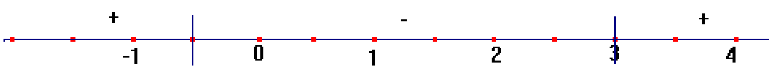
c) $y=\dfrac{4x}{x-1}$ cambiamos $x=\dfrac{4y}{y-1}$ y despejamos $xy-x=4y\rightarrow xy-4y=x$

$y(x-4)=x\rightarrow y=\dfrac{x}{x-4}\rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-4}$

Comprobación: $(g\circ g^{-1})(x)=g\left[g^{-1}(x)\right]=g\left(\dfrac{x}{x-4}\right)=\dfrac{4\cdot\dfrac{x}{x-4}}{\dfrac{x}{x-4}-1}=\dfrac{\dfrac{4x}{x-4}}{\dfrac{x-x+4}{x-4}}=\dfrac{4x}{x}=4$

2. Halla los dominios de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-3}}\rightarrow\dfrac{2x+1}{x-3}\geq 0\rightarrow\begin{cases}2x+1=0\rightarrow x=-\dfrac{1}{2}\\ x-3=0\rightarrow x=3\end{cases}$



$\mathrm{Dom}(f)=\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup(3,+\infty)$

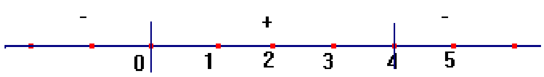
b) $g(x)=e^{\frac{2}{x^2-x}}$ la exponencial está definida en todo R, pero hay que tener cuidado con el exponente, que no está definido para

$x^2-x=0\rightarrow x(x-1)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=1\end{cases}$ $\quad$ $\mathrm{Dom}(g)=R-\{0,1\}$

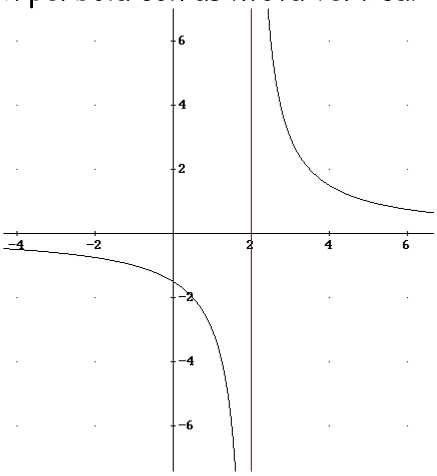
c) $h(x)=\log\left(4x-x^2\right)$ los logaritmos sólo están definidos para números positivos, es decir si

$4x-x^2>0\rightarrow x(4-x)>0\rightarrow$

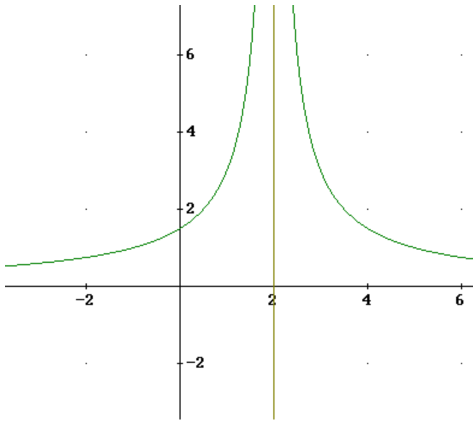
Dom(h)= $(0,4)$



3. $y=\left|\dfrac{3}{x-2}\right|$ primero vamos a representar la función $y=\dfrac{3}{x-2}$, que es una hipérbola con asíntota vertical x = 2 y horizontal el eje x.



y ahora el valor absoluto:



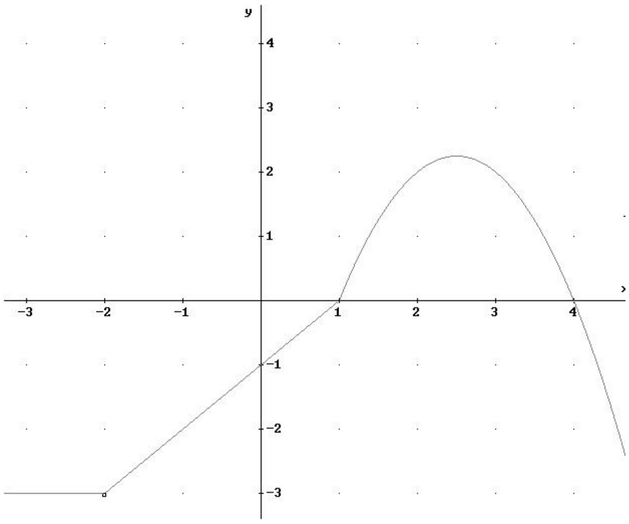
Características: Dom = $R-\{2\}$

Rec = $(0,+\infty)$ Continua en su dominio, discontinuidad de salto infinito en x = 2

Creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$

4. $f(x)=\begin{cases}-3 & \text{si } x<-2 & \rightarrow \text{recta horizontal}\\ x-1 & \text{si } -2<x<1 & \rightarrow \text{recta}\\ -x^2+5x-4 & \text{si } x\geq 1 & \rightarrow \text{parábola}\end{cases}$

Parábola $y=-x^2+5x-4$ vértice $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{5}{-2}=\dfrac{5}{2}\rightarrow V\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{9}{4}\right)$



Corte con los ejes: Eje OX:

$-x^2+5x-4=0\rightarrow x=\left\langle\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.$ eje

$OY\rightarrow y=-4$

Características:

Dom = $R-\{-2\}$

Rec = $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$

Constante en $(-\infty,-2)$

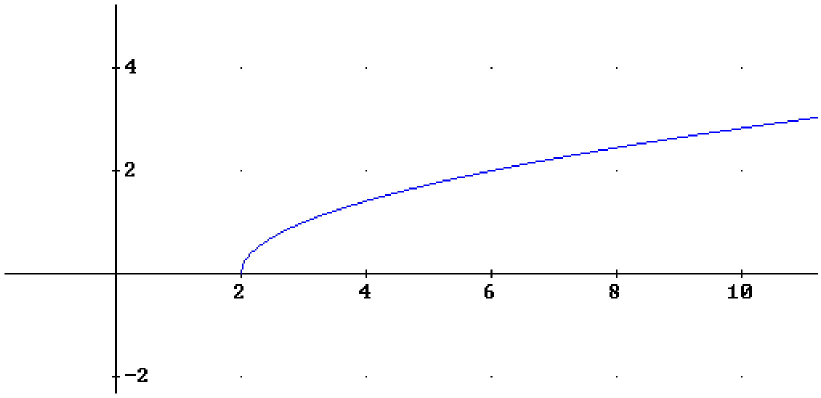
Creciente en $\left(-2,\dfrac{5}{2}\right)$

Decreciente en $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

Tiene un máximo en $V\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ no tiene asíntotas.

5. $y=\sqrt{x-2}$ tiene que ser $x-2\geq 0 \rightarrow x\geq 2$ luego, Dom = $[2,+\infty)$
corta al eje x en (2,0), no corta al eje y, es creciente y continua en su dominio y su recorrido es $[0,+\infty)$

Gráfica:



$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ función exponencial de base menor que 1, Dom = R, siempre positiva, decreciente en su dominio, corta al eje y en (0,1) y no corta al eje x.

Gráfica: