GLOBAL ÁLGEBRA Noviembre 2008

1.- Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{4-10x}{x^2-4}$ (1 punto)

b) $2^{2x}+3\cdot 2^{x+1}-10\cdot 2^{x-2}=11$ (1 punto)

c) $-\frac{2}{3}(2x+7)(x^4-17x^2-38)=0$ (0,75 puntos)

d) $2\cdot\log x-\log(x-2)=\log(3x-4)$ (0,75 puntos)

2.- Resuelve las inecuaciones: (1,5 puntos)

a) $\frac{x^2}{x-2}\leq -1$ b) $|2x-1|\leq 5$

3.- Resuelve los sistemas de ecuaciones: (2 puntos)

a) $\left.\begin{array}{c} x+y=9 \\ \sqrt{x+5}-\sqrt{y-1}=1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{c} x^2+y^2=5 \\ \log x-\log y=\log 2 \end{array}\right\}$

4.- Resuelve los sistemas de inecuaciones: (2 puntos)

a) $\left.\begin{array}{l} x^2+5x\leq 0 \\ 16-2x<3x-3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2y-1\geq 1 \\ 3x-y<0 \end{array}\right\}$

5.- Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros, lo que supone un total de 2000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble del número de billetes de 20 €. Averigua cuántos billetes hay de cada tipo . **Aplicando el método de Gauss.** (1 punto)

SOLUCIONES

1. a) $\dfrac{3x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{4-10x}{x^2-4}$ $\qquad$ m.c.m. $=(x+2)(x-2)$

$$\frac{(3x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{4-10x}{x^2-4}\to 3x^2-5x-2-x^2-4x-4=4-10x$$

$$2x^2+x-10=0\to x=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{4}=\begin{cases}2\\-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$ Solución $x=-\dfrac{5}{2}$ $\qquad$ (2 no es válido)

b) $2^{2x}+3\cdot 2^{x+1}-10\cdot 2^{x-2}=11\to\left(2^x\right)^2+3\cdot 2\cdot 2^x-10\cdot 2^{-2}\cdot 2^x=11$

hacemos el cambio $t=2^x\to t^2+6t-\dfrac{10}{4}t-11=0\to t^2+\dfrac{7}{2}t-11=0$

$$2t^2+7t-22=0\to t=\frac{-7\pm\sqrt{49+176}}{4}=\frac{-7\pm 15}{4}=\begin{cases}2\\-\dfrac{11}{2}\end{cases}$$

$$t=2^x=\begin{cases}2=2^2\Rightarrow x=1\\-\dfrac{11}{2}\text{ imposible}\end{cases}$$ Solución x = 1

c) $-\dfrac{2}{3}(2x+7)\left(x^4-17x^2-38\right)=0\to\begin{cases}2x+7=0\Rightarrow x=-\dfrac{7}{2}\\x^4-17x^2-38=0\to x^2=z\end{cases}$

$$z^2-17z-38=0\to z=\frac{17\pm\sqrt{289+152}}{2}=\frac{17\pm 21}{2}=\begin{cases}19\\-2\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}\pm\sqrt{19}\\\pm\sqrt{-2}\end{cases}$$

Soluciones: $x=-\dfrac{7}{2},\quad x=+\sqrt{19},\quad x=-\sqrt{19}$

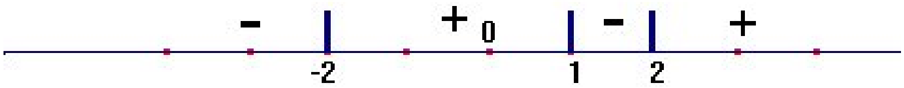
d) $2\cdot\log x-\log(x-2)=\log(3x-4)\to\log x^2-\log(x-2)=\log(3x-4)$

$$\log\frac{x^2}{x-2}=\log(3x-4)\Rightarrow\frac{x^2}{x-2}=3x-4\Rightarrow x^2=3x^2-6x-4x+8$$

$$2x^2-10x+8=0\Rightarrow x^2-5x+4=0\to x=\begin{cases}4\\1\end{cases}$$ Solución x=4 (1 no es válido)

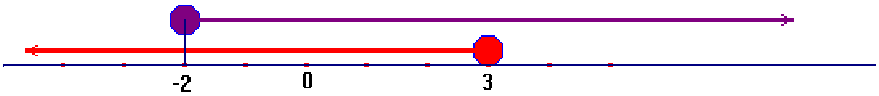
2.- Resuelve las inecuaciones:

a) $\dfrac{x^2}{x-2}\le -1\ \Rightarrow\dfrac{x^2}{x-2}+1\le 0\Rightarrow\dfrac{x^2+x-2}{x-2}\le 0$ $\qquad$ $x^2+x-2=0\Rightarrow x=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$



Solución:
$(-\infty,-2]\cup[1,2)$

b) $|2x-1| \le 5 \to -5 \le 2x-1 \le 5 \to$ sistema $\left.\begin{matrix} 2x-1 \ge -5 \\ 2x-1 \le 5 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2x \ge -4 \\ 2x \le 6 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x \ge -2 \\ x \le 3 \end{matrix}\right\}$



Solución: $[-2,3]$

3.- Resuelve los sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{matrix} x+y=9 \\ \sqrt{x+5}-\sqrt{y-1}=1 \end{matrix}\right\}$ Por sustitución: $y = 9-x \to \sqrt{x+5}-\sqrt{9-x-1}=1$

$\sqrt{x+5} = 1+\sqrt{8-x} \Rightarrow \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = \left(1+\sqrt{8-x}\right)^2 \Rightarrow x+5 = 1+2\sqrt{8-x}+8-x$

$x+5-1-8+x = 2\sqrt{8-x} \Rightarrow 2x-4 = 2\sqrt{8-x} \Rightarrow x-2 = \sqrt{8-x} \Rightarrow (x-2)^2 = 8-x$

$x^2-4x+4 = 8-x \Rightarrow x^2-3x-4 = 0 \Rightarrow x = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix}\right.$ comprobamos:

$\sqrt{4+5} = 1+\sqrt{8-4} \to 3 = 1+2$

$\sqrt{-1+5} = 1+\sqrt{8+1} \to 2 \ne 1+3$ sólo un valor de x es válido x = 4

Y ahora calculamos $y = 9-x = 9-4 = 5$, Solución: x = 4, y = 5

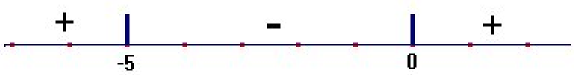
b) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=5 \\ \log x - \log y = \log 2 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x^2+y^2=5 \\ \log\frac{x}{y} = \log 2 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x^2+y^2=5 \\ \frac{x}{y} = 2 \to x = 2y \end{matrix}\right\} \to (2y)^2+y^2 = 5$

$4y^2+y^2 = 5 \Rightarrow 5y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1$ (no puede ser negativo)

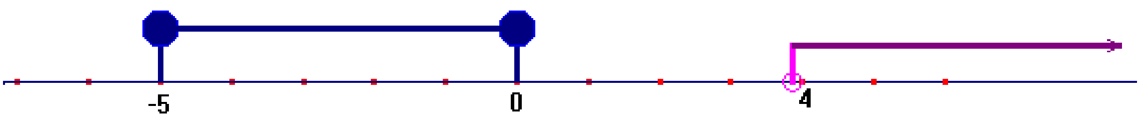
Hallemos ahora x: $x = 2y \Rightarrow x = 2$ Solución: x = 2 y = 1

4.- Resuelve los sistemas de inecuaciones:

a) $\left.\begin{matrix} x^2+5x \le 0 \\ 16-2x < 3x-3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x(x+5) \le 0 \\ 16+3 < 3x+2x \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x(x+5) \le 0 \\ 19 < 5x \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \text{sol}: [-5,0] \\ \text{sol}: \left(\frac{19}{5}, +\infty\right) \end{matrix}\right\}$

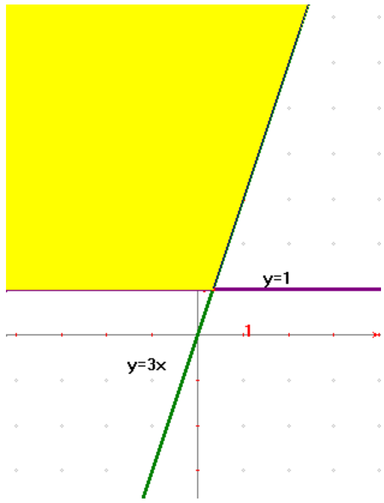


La solución del sistema será la intersección de las dos soluciones, es decir:



No hay intersección. Solución: ϕ

b) $\left.\begin{array}{l}2y-1\geq 1\\ 3x-y<0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}2y-1=1\\ 3x-y=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}y=1\\ y=3x\end{array}\right\}$ representamos las dos rectas y hallamos los semiplanos solución de cada inecuación, la intersección de los dos será la solución del sistema, que es la zona en amarillo, entrando la semirrecta correspondiente a y=1 y no entrando la otra.



5.- Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros, lo que supone un total de 2000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble del número de billetes de 20 €. Averigua cuántos billetes hay de cada tipo . **Aplicando el método de Gauss.**

$$\left.\begin{array}{l}x-\text{billetes de }10\\ y-\text{billetes de }20\\ z-\text{billetes de }50\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=95\\ 10x+20y+50z=2000\\ x=2y\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=95\\ x+2y+5z=200\\ x-2y\quad=0\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{E_2-5E_1}\left.\begin{array}{l}x+y+z=95\\ -4x-3y\quad=-275\\ x-2y\quad=0\end{array}\right\}\xrightarrow{E_2+4E_3}\left.\begin{array}{l}x+y+z=95\\ -11y\quad=-275\\ x-2y\quad=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=95\\ x-2y\quad=0\\ 11y\quad=275\end{array}\right\}$$

$$y=\frac{275}{11}=25\rightarrow x-2\cdot 25=0\Rightarrow x=50\quad\rightarrow 50+25+z=95\Rightarrow z=20$$

Solución: Hay 50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €.