CONTROL ANÁLISIS 1

1.- Calcula los siguientes límites : (0,75 puntos cada uno)

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{8+x}-3}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x+4}}\right)^x$

2.- Halla los valores de k y h para los que la función siguiente es continua en todo R.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si\ x<0 \\ x^2+k & si\ 0\le x\le 4 \\ \dfrac{(\sqrt{x}-2)(3x+h)}{x^2-16} & si\ x>4 \end{cases}$$ (2 puntos)

3.- En la función racional : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-5x^2+mx-4}$

a) Halla m sabiendo que f tiene una discontinuidad evitable en x = 1.
b) Estudia su continuidad. (2 puntos)

4.- Calcula las derivadas de:

a) $y=2\sqrt[3]{x}+5^x$ (0,5 puntos) b) $y=3\,\mathrm{tg}^2(x^3-2)$ (0,5 puntos)

c) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}}$ (1 punto)

5.- Dada la ecuación $x\cdot\cos x - sen\, x = 0$. Demuestra que hay una solución de la misma en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ y hállala. Enuncia el teorema que hayas utilizado.
(1,75 puntos)

SOLUCIONES

1.- Calcula los siguientes límites :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^3+1)(x-2)}{(x^2+6x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+1}{x^2+6x+1}=$

$=\dfrac{2^3+1}{2^2+6\cdot 2+1}=\dfrac{9}{17}$

	1	-2	0	+1	- 2
2		2	0	0	+2
	1	0	0	1	0

	1	+4	- 11	-2
2		+2	+12	+2
	1	+6	+1	0

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{8+x}-3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-2)(\sqrt{8+x}+3)}{(\sqrt{8+x}-3)(\sqrt{8+x}+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-2)(\sqrt{8+x}+3)}{(\sqrt{8+x})^2-9}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-2)(\sqrt{8+x}+3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)(\sqrt{8+x}+3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}2(\sqrt{8+x}+3)=2(\sqrt{9}+3)=12$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x+4}}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+4}-1\right)\cdot\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1-x-4}{x+4}\right)\cdot\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3}{x+4}\right)\cdot\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{2x+8}=-\dfrac{3}{2}$

2.-

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si\ x<0 & \text{continua en } (-\infty,0),\ \textit{polinómica}\\ x^2+k & si\ 0\le x\le 4 & \text{continua en } (0,4),\ \textit{polinómica}\\ \dfrac{(\sqrt{x}-2)(3x+h)}{x^2-16} & si\ x>4 & \text{continua en } \mathbb{R}-\{\pm 4\}\to \text{continua en } (4,+\infty)\end{cases}$$

tiene que ser continua en los puntos de "enganche", es decir, hay que estudiar la continuidad en los puntos 0 y 4

Continuidad en 0:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^2+k=k\\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+k)=k\end{array}\right\}\Rightarrow k=2$$

Continuidad en 4:

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=4^2+k=4^2+2=18\\ \lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(x^2+k)=18\\ \lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(3x+h)}{x^2-16}=(*)\end{array}\right\}\Rightarrow (**)$$

(*)
$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(3x+h)}{x^2-16}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(3x+h)}{(x+4)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(3x+h)}{(x+4)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{12+h}{32}$

luego, (**) $\dfrac{12+h}{32}=18 \Rightarrow 12+h=18\cdot 32 \Rightarrow h=564$

3.- $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-5x^2+mx-4}$

a) Halla m sabiendo que f tiene una discontinuidad evitable en x = 1.

Si tiene una discontinuidad evitable en x = 1, significa que $f(1)=\dfrac{0}{0}$

Es evidente que para x = 1 el numerador se anula, pero también se tiene que anular el denominador, es decir: $1^3-5\cdot 1^2+m-4=0 \Rightarrow m=4+5-1=8$

b) Estudia su continuidad.

$f(x)=\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-5x^2+8x-4}$ empezaremos hallando las raíces del denominador

	1	-5	+8	-4
1		1	- 4	+4
	1	- 4	+4	0

$x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2$ (doble)

En x = 1 ya sabemos que tiene una discontinuidad evitable, veamos qué pasa en x = 2

$f(2)$ no existe (se anula el denominador), hacemos los límites laterales

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-5x^2+8x-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3+x^2-x-1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{9}{0^+}=+\infty$$ tenemos una asíntota vertical

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-5x^2+8x-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+x^2-x-1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{9}{0^+}=+\infty$$ de ramas convergentes en x = 2

4.- a) $y=2\sqrt[3]{x}+5^x$ $\qquad y`=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+5^x\ln 5$

b) $y=3\,\mathrm{tg}^2(x^3-2)$ $\qquad y´=3\cdot 2\,tg(x^3-2)\cdot\left[1+tg^2(x^3-2)\right]\cdot 3x^2$

$y´=18x^2\,tg(x^3-2)\cdot\left[1+tg^2(x^3-2)\right]$

c) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}}$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}}}\cdot\frac{(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$y'=\frac{1}{2\left(\sqrt{\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}}\right)^2}\cdot\frac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}=\frac{1}{2\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}}\cdot\frac{-4e^xe^{-x}}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2\left(e^x + e^{-x}\right)} \cdot \frac{-4e^x e^{-x}}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2} = \frac{-2e^0}{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right)} = -\frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}}$$

5.- $x \cdot \cos x - sen\, x = 0$, en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Vamos a aplicar el teorema de Bolzano, que dice:
Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y de dicha función toma distinto signo en los extremos de dicho intervalo $(sg[f(a)] \neq sg[f(b)])$, entonces podemos asegurar que la función f se anula al menos una vez en el intervalo (a,b).

En este caso, tomaremos la función f como $f(x) = x \cdot \cos x - sen\, x$ (ya que es la que se tiene que anular) y veamos si cumple las hipótesis del Teorema de Bolzano:
f es continua en R, ya que los son las funciones x, sen x y cos x, por lo tanto f es continua en el intervalo indicado $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

veamos ahora el signo:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 - 1 = -1 < 0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \cdot 0 + 1 = 1 > 0$$

Por lo tanto, podemos afirmar que esta ecuación tiene al menos una solución en el intervalo dado, para hallarla habrá que seguir reduciendo el intervalo, probemos con 0:

$$f(0) = 0\cos 0 - sen\, 0 = 0 - 0 = 0$$

La solución pedida es x = 0