CONTROL ANÁLISIS 1 **octubre 2009**

1. Sea $f:\Re \to \Re$ la función definida por $f(x) = \left(3x - 2x^2\right)e^x$
   a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
   b) Calcula los extremos relativos de f. (2 p)

2. Sea $f:\Re \to \Re$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Obtener c para que sea continua en $\Re$.
b) Obtener b para que sea derivable en $\Re$. (En 0 aplicando la definición)(2,5 p)

3. Aprovechando como hipotenusa una pared de $\sqrt{200}$ m, se desea acotar una superficie triangular de área máxima. ¿Qué medidas deberán tener los otros dos lados (catetos)? (2 p)

4. Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)\,\text{sen}\, x}{x^3 - x^2}$ (2 p)

5. Dada la función $f(x) = (x^2 + 1)\,\text{sen}\, x$, escribe la ecuación de las rectas tangente y normal a su gráfica en el punto de abscisa 0. (1,5 p)

SOLUCIONES

1. Sea $f:\Re \to \Re$ la función definida por $f(x)=\left(3x-2x^2\right)e^x$

   c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

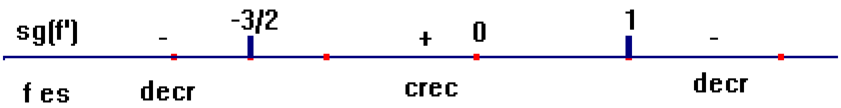
   d) Calcula los extremos relativos de f.

Hallamos la primera derivada e igualamos a cero:

$$f'(x)=(3-4x)e^x+\left(3x-2x^2\right)e^x=\left(-2x^2-x+3\right)e^x=0 \to -2x^2-x+3=0$$

resolviendo la ecuación, tenemos que los posibles extremos son 1 y $-\frac{3}{2}$

Crecimiento y decrecimiento:



Luego f es decreciente en $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ y creciente en $\left(-\frac{3}{2},1\right)$

Esta función es además continua y derivable en R (producto de dos funciones continuas y derivables en R: polinómica y exponencial), no tiene ningún punto anguloso, luego tiene dos extremos relativos que son:

Mínimo en $x=-\frac{3}{2} \to y=\left(3\left(-\frac{3}{2}\right)-2\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)e^{-3/2}=-9e^{-3/2} \to \left(-\frac{3}{2},-\frac{9}{e^{3/2}}\right)$

Máximo en $x=1 \to y=(3-2)e=e \ \to (1,e)$

2. Sea $f:\Re \to \Re$ la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si } x\le 0 \to \text{polinómica, continua y derivable en } (-\infty,0) \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \to \text{continua y derivable en } (0,+\infty), \text{ ya que } x>0, \text{ y} \\ \text{los problemas estarían en } x=0 \text{ y cuando } x+1<0 \Rightarrow x<-1, \text{que no es el caso} \end{cases}$$

a) Obtener c para que sea continua en $\Re$

Tendrá que ser continua en x = 0, que es el punto de "enganche", veamos:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0+0+c=c \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+bx+c)=c \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\underline{\underline{L'H}}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x+1}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow c=1$$

b) Obtener b para que sea derivable en $\Re$. (En 0 aplicando la definición)

Hallamos las derivadas laterales en x=0:

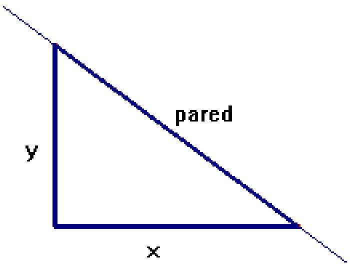
$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+bh+1-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(h+b)}{h}=\lim_{h\to 0^-}(h+b)=b$$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{\ln(h+1)}{h}-1}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\ln(h+1)-h}{h^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=(L'H)=$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{1}{h+1}-1}{2h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{1-h-1}{h+1}}{2h}=\lim_{h\to0^+}\frac{-h}{2h(h+1)}=\lim_{h\to0^+}\frac{-1}{2(h+1)}=-\frac{1}{2}$$

Luego, para que sea derivable en R, tiene que ser $b=-\frac{1}{2}$

3. Aprovechando como hipotenusa una pared de $\sqrt{200}$ m, se desea acotar una superficie triangular de área máxima. ¿Qué medidas deberán tener los otros dos lados (catetos)?



Hay que optimizar (máximo) el área del triángulo, es decir, la función: $A=\frac{x\cdot y}{2}$

Relación entre x e y: $x^2+y^2=\left(\sqrt{200}\right)^2$

$y^2=200-x^2\rightarrow y=\sqrt{200-x^2}$

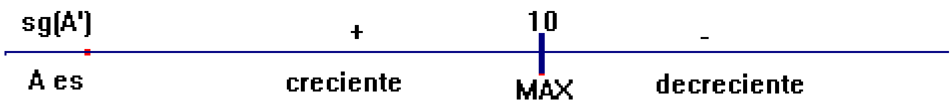
Sustituimos y derivamos A para hallar el máximo:

$$A=\frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}\rightarrow A'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}+\frac{x\cdot(-2x)}{2\sqrt{200-x^2}}\right)$$

$$A'=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{200-x^2}\right)^2-x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\frac{200-2x^2}{\sqrt{200-x^2}}=\frac{100-x^2}{\sqrt{200-x^2}}=0$$

$$100-x^2=0\Rightarrow x^2=100\Rightarrow x=10\rightarrow y=\sqrt{200-100}=\sqrt{100}=10$$

Comprobemos que para estos valores, el área es máxima:



4.Calcula: $\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)\operatorname{sen}x}{x^3-x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\underline{\underline{L'H}}\lim_{x\to0}\frac{e^x\operatorname{sen}x+(e^x-1)\cos x}{3x^2-2x}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)-\cos x}{3x^2-2x}=\left(\frac{0}{0}\right)\underline{\underline{L'H}}\lim_{x\to0}\frac{e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)+e^x(\cos x-\operatorname{sen}x)+\operatorname{sen}x}{6x-2}=$$

$$=\frac{1+1+0}{-2}=-1$$

5. Dada la función $f(x) = (x^2 + 1)\text{sen}\, x$, escribe la ecuación de las rectas tangente y normal a su gráfica en el punto de abscisa 0.

$f'(x) = 2x\text{sen}x + (x^2 + 1)\cos x \rightarrow f'(0) = 0 + 1 = 1 =$ pendiente de la tangente

Recta tangente: $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 0 = 1x \Rightarrow y = x$

Recta normal: la pendiente es inversa y opuesta a la de la tangente, es decir -1

$y - 0 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x$