CONTROL ANÁLISIS 2

1.- a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ 1-x^2 & si\ 0<x\le 1 \\ x & si\ 1<x \end{cases} \qquad \text{(1 punto)}$$

b) Determina los valores de a y b para que la función

$f(x)=\begin{cases} e^{bx}\cdot\cos ax & si\ x<0 \\ \ln\left[(e+x)^a\right] & si\ x\ge 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en todo R.(1 punto)

2.- Dada la función $f(x)=sen\ x$ con $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, se pide:

a) Halla un punto en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ en el que la recta tangente sea paralela a la cuerda que pasa por los extremos $(0,0)$ y $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ (0’75 puntos)

b) Determina la ecuación de dicha recta tangente. (0’75 puntos)

c) ¿Tiene esto algo que ver con algún teorema? En caso afirmativo, enúncialo.(0’5 puntos)

3.- Dadas las funciones: $f(x)=\frac{1}{x^2}$ y $g(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

a) Halla la función derivada de *f(x)* aplicando la definición de derivada (0’5 puntos)

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento y los puntos críticos de *g(x)* (0’75 puntos)

c) Estudia la curvatura de la función *g(x).* (0’75 puntos)

4.- Averigua las dimensiones de una lata cilíndrica (es decir, el radio de la base y la altura de la lata) de 333 cm^3, de modo que la chapa empleada en su construcción sea mínima. (2 puntos)

5.- Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Calcula: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ (0’75 puntos)

b) Dada la función $f(x)=|2x-2|-2$, comprueba que $f(0)=f(2)$ y sin embargo $f'(x)\ne 0, \forall x\in(0,2)$. Explica cómo este hecho no contradice el teorema de Rolle. (0’75 puntos)

c) Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2=10$ en el punto de abscisa *x = 1* y ordenada negativa. (0’5 puntos)

SOLUCIONES

1.- a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ 1-x^2 & si\ 0<x\le 1 \\ x & si\ 1<x \end{cases}$$ cada parte es continua (exponencial y polinómicas)

veamos la continuidad en los puntos 0 y 1:

Continuidad en 0:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^x=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)=1 \end{array}\right\}\text{continua en } 0$$

Continuidad en 1:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1-1^2=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x=1 \end{array}\right\}\text{NO continua}$$

Derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} e^x & si\ x<0 \\ -2x & si\ 0<x<1 \\ 1 & si\ 1<x \end{cases}$ vemos que no es derivable en 0 ni en 1.

b) $f(x)=\begin{cases} e^x\cdot\cos ax & si\ x<0 \\ \ln\left[(e+x)^a\right] & si\ x\ge 0 \end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases} be^{bx}\cdot\cos ax-a\cdot e^{bx}\cdot sen\ ax & si\ x<0 \\ \dfrac{a(e+x)^{a-1}}{(e+x)^a} & si\ x>0 \end{cases}$

cada trozo de *f(x)* es continuo: exponencial y coseno lo son en R, y el logaritmo en los reales positivos, por lo tanto, sólo nos queda que sea continua y derivable en 0:

Continuidad en 0:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\ln\left[e^a\right]=a \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^{bx}\cos ax=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(e+x)^a=a \end{array}\right\}a=1$$

Derivabilidad en 0:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(be^{bx}\cos x-e^{bx}sen\,x)=b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e+x}=\dfrac{1}{e} \end{array}\right\}b=\frac{1}{e}$$

2.- $f(x)=sen\ x$ con $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

a) tangente paralela a la cuerda que pasa por los extremos $(0,0)$ y $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$

$f'(x)=sen\,x$ pendiente de la cuerda: $m=\dfrac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0}=\dfrac{2}{\pi}\to f'(x)=\cos x=\dfrac{2}{\pi}\to x_0=0'88$

b) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\to y=sen\,0'88+\dfrac{2}{\pi}(x-0'88)\to y=0'77+0'64(x-0'88)$

c) Teorema del Valor Medio: Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces podemos asegurar que $\exists c\in(a,b)\ /\ f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

3.- a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{h(x+h)^2x^2}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-x^2-h^2-2xh}{h(x+h)^2x^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2xh}{h(x+h)^2x^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-h(h+2x)}{h(x+h)^2x^2}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-(h+2x)}{(x+h)^2x^2}=\frac{-2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$$

b) $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}\to g'(x)=\dfrac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\to g'(x)=0$

$$x^4-3x^2=0\Rightarrow x^2(x^2-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

sg g'	+	-1'7	-	-1	-	0	-	1	-	1'7	+
g es	crec	Máx	decr		decr		decr		decr	Mín	crec

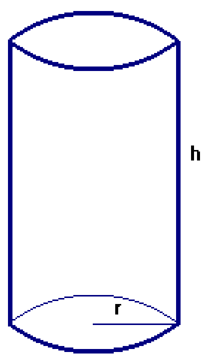
$g(x)$ crece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$

c) $g''(x)=\dfrac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=0\to$

$2x^3+6x=0\Rightarrow x(2x^2+6)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\sqrt{-3}\end{cases}$ Punto de inflexión en 0

sg g''	-	-1	+	0	-	1	+
g es	cóncava		convexa		cóncava		convexa

$g(x)$ es cóncava ($\cap$) en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y convexa ($\cup$) en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$



4.- $V=\pi r^2h=333\Rightarrow h=\dfrac{333}{\pi r^2}$; $A=2\pi r^2+2\pi r h$

$A=2\pi r^2+2\pi r\dfrac{333}{\pi r^2}=2\pi r^2+\dfrac{666}{r}$, esta es la función a minimizar

$A'=4\pi r-\dfrac{666}{r^2}=\dfrac{4\pi r^3-666}{r^2}=0\Rightarrow 4\pi r^3=666\Rightarrow r^3=\dfrac{666}{4\pi}$

$r=3'76$, comprobemos que es un mínimo

sg A'	-	3'76	+
A	decrece	MÍN	crece

nos falta hallar h: $h = \frac{333}{\pi r^2} = \frac{333}{\pi 3'76^2} = 7'5$

Luego la lata tendrá que tener 3’76 cm de radio de la base y 7’5 cm de altura

5.- a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x + 2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$ indeterminación, que resolvemos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \ln\left[\left(\frac{e^x+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right]} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+2^x}{2}\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{e^x+2^x}{2}\right)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)} \quad L'Hopital =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\frac{1}{2}\left(e^x+2^x \ln 2\right)}{\frac{e^x+2^x}{2}}}{1}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(e^x+2^x \ln 2\right)}{\frac{1}{2}\left(e^x+2^x\right)}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2^x \ln 2}{e^x+2^x}} = e^{\frac{1+\ln 2}{2}}$$

b) $f(x) = |2x-2| - 2$, comprobamos: $\left.\begin{array}{l} f(0) = |0-2| - 2 = 0 \\ f(2) = |4-2| - 2 = 0 \end{array}\right\}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-2-2 & si\, 2x-2 \geq 0 \rightarrow 2x-4 \quad si\, x \geq 1 \\ -2x+2-2 & si\, 2x-2 < 0 \rightarrow -2x \quad si\, x < 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & si\, x > 1 \\ -2 & si\, x < 1 \end{cases}$$

vemos que no se contradice el teorema de Rolle, ya que la función f no es derivable en $1 \in (0,2)$

c) $x^2 + y^2 = 10$ en x = 1 $\Rightarrow 1^2 + y^2 = 10 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$, el punto es el (1,-3)

derivada: $2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y} \rightarrow y'(1) = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$

ecuación de la recta tangente: $y = f(1) + f'(1)(x-1) \rightarrow y = -3 + \frac{1}{3}(x-1)$

$$y = -3 + \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{10}{3}$$