GLOBAL ANÁLISIS 3

1.- Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{15}{1+x^2}$ y $g(x)=x^2-1$ (3 puntos)

a) Haz un estudio lo más completo posible de la función f y represéntala gráficamente.
b) Representa también la función g.
c) Halla el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

ELIGE 4 DE LOS 6 EJERCICIOS SIGUIENTES (1'75 puntos cada uno)

2.- Sea f la función $f(x)=Ln\left(x^2+1\right)$

a) Determina los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de f.
b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa.

3.- Halla la función f sabiendo que $f''(x)=12x-6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 tiene de ecuación $4x-y-7=0$.

4.- Sea f la función $f(x)=\dfrac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2}$, estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, hállala.

5.- Se sabe que la función $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si\ 0\le x<2 \\ -4+\sqrt{x-1} & si\ 2\le x\le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0,5). Calcula a y b.

6.- Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro que tenga una superficie total de 200 cm^2. Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo.

7.- Calcula $\int \left(x^2-1\right)e^{-x}dx$

SOLUCIONES

1.- a) $f(x)=\dfrac{15}{1+x^2}$ *Dom(f) = R* , es simétrica respecto del eje OY (PAR)

Asíntotas: No tiene verticales

Horizontal: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{15}{1+x^2}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{15}{1+x^2}=0$ A.H. y = 0 a derecha e izquierda

Crecimiento y extremos:

$$f'(x)=\frac{-15\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{-30x}{\left(1+x^2\right)^2}=0\rightarrow x=0 \text{ posible extremo}$$

$f'(x)>0$ en $(-\infty,0)\Rightarrow$ f creciente ; $f'(x)<0$ en $(0,+\infty)\Rightarrow$ f decreciente

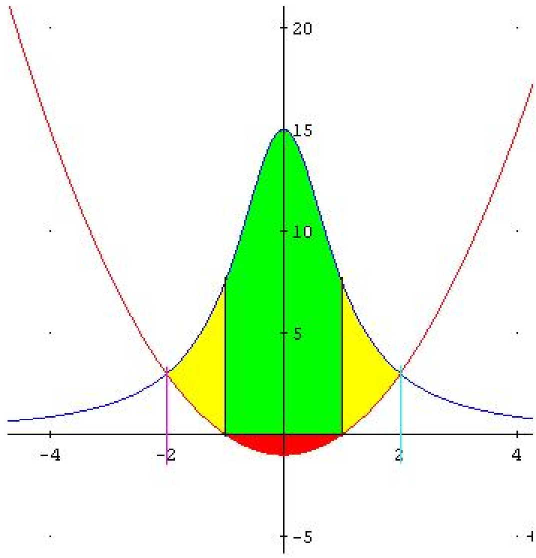
luego, en (0,15) la función tiene un máximo, éste es además el punto de corte con el eje OY y no corta al eje OX, es siempre positiva.

Concavidad y puntos de inflexión:

$$f''(x)=\frac{-30\left(1+x^2\right)^2+30x\cdot 2\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{-30\left(1+x^2\right)+120x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{90x^2-30}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$90x^2-30=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

P.I. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{45}{4}\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{45}{4}\right)$



b) $g(x)=x^2-1$ es una parábola con vértice en (0, -1)
corta al eje OX en 1 y -1

c)hallamos ahora los puntos de corte de las dos gráficas:

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{15}{1+x^2}\\ y=x^2-1\end{array}\right\}\frac{15}{1+x^2}=x^2-1\Rightarrow$$

$$15=x^4-1\Rightarrow x^4=16\Rightarrow x=\pm 2$$

observamos que la parábola tiene una parte bajo el eje X, $x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$ entonces el área pedida será la suma de la ROJA (Ar), la VERDE (Av) y la AMARILLA (Aa)

$$Ar=\left|\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}\Bigg|=\left|-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right|=\frac{4}{3}$$

$$Av=\int_{-1}^{1}\frac{15}{1+x^2}dx=15arctg\,x\Big]_{-1}^{1}=11'78+11'78=23'56$$

$$Aa=2\left[\int_{1}^{2}\frac{15}{1+x^2}dx-\int_{1}^{2}(x^2-1)dx\right]=2\cdot 15arctg\,x\Big]_1^2--2\cdot\frac{x^3}{3}-x\Big]_1^2=$$

$$=\ 30arctg\,2-30arctg\,1-2\left[\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1\right]=\ 30\cdot 1'11-30\cdot 0'785-2\cdot\frac{4}{3}=7'08$$

Luego, el área pedida es $A=1'\widehat{3}+23'56+7'08=31'97$ u.a.

2.- $f(x) = Ln\left(x^2+1\right)$

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 0$ posible extremo

no tiene asíntotas , vemos el crecimiento $f'(x) < 0 \quad si\ x < 0$ y $f'(x) > 0 \quad si\ x > 0$

En x = 0 tenemos un mínimo relativo en $(0,0)$

b) Para hallar los puntos de inflexión, calculamos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2+2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ posibles}$$

P.I., veamos el signo:
$$\begin{array}{l} f''(x) < 0\ si\ x < -1 \rightarrow \cup \\ f''(x) > 0\ si\ -1 < x < 1 \rightarrow \cap \Rightarrow \text{ P.I. } (1, \ln 2),\quad (-1, \ln 2) \\ f''(x) > 0\ si\ x > 1 \rightarrow \cup \end{array}$$

Tenemos que hallar la ecuación de la recta tangente en $(-1, \ln 2)$ (abscisa negativa)

$y - \ln 2 = f'(-1)(x+1) \rightarrow y - \ln 2 = 1\cdot(x+1) \rightarrow y = x + 1 + \ln 2$

3.- Halla la función f sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

$f'(x) = \int (12x-6)dx = \dfrac{12x^2}{2} - 6x + C = 6x^2 - 6x + C$

$4x - y - 7 = 0 \rightarrow y = 4x - 7 \rightarrow m = 4 \rightarrow f'(2) = 4 \rightarrow 6\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + C = 4 \rightarrow C = -8$

$f(x) = \int (6x^2 - 6x - 8)dx = 2x^3 - 3x^2 - 8x + C$

por otra parte, la recta tangente pasa por el punto (2,1), luego f también, es decir que

$f(2) = 1 \rightarrow 2 - 3 - 8 + C = 1 \Rightarrow C = 1 + 9 \rightarrow C = 10$

4.- Si existe asíntota horizontal sólo es por la derecha, porque el logaritmo sólo existe para valores positivos.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} = \frac{\infty}{\infty}(L'H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2 + x\cdot\dfrac{2\ln x}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{2(x-1)} = \frac{\infty}{\infty}(L'H) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x + 2}{2x} = \frac{\infty}{\infty}(L'H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot\dfrac{1}{x}}{2} = 0$$, luego tenemos que el eje OX es asíntota horizontal por la derecha.

5.- $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & si\ 0 \le x < 2 \\ -4 + \sqrt{x-1} & si\ 2 \le x \le 5 \end{cases}$ cada parte es continua y derivable

veamos la continuidad y derivabilidad en el punto 2:

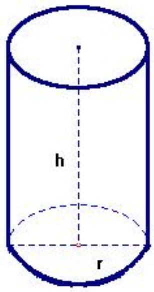
Continuidad en 2:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -4 + \sqrt{2-1} = -3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} ax + bx^2 = 2a + 4b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (-4 + \sqrt{x-1}) = -3 \end{array}\right\}$$ para que sea continua tiene que ser $2a + 4b = 3$

Derivabilidad: $f'(x)=\begin{cases} a+2bx & si\ 0<x<2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & si\ 2<x<5 \end{cases}$ $\begin{matrix} \to f'(2^-)=a+4b \\ \to f'(2^+)=\dfrac{1}{2} \end{matrix}$ $\to a+4b=\dfrac{1}{2}$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{matrix} 2a+4b=3 \\ a+4b=\dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=\dfrac{5}{2} \quad b=-\dfrac{1}{2}$

6.- Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro que tenga una superficie total de 200 cm^2.



$$A=2\pi r^2+2\pi rh=200 \to \pi r^2+\pi rh=100 \to h=\frac{100-\pi r^2}{\pi r}$$

$V=\pi r^2 h$ es la función que hay que maximizar

$$V=\pi r^2\cdot\frac{100-\pi r^2}{\pi r}=100r-\pi r^3 \to V'=100-3\pi r^2=0$$

$$100=3\pi r^2 \to r^2=\frac{100}{3\pi} \to r=\sqrt{\frac{100}{3\pi}} \to r=3'26\,\text{cm}$$

es un máximo, ya que antes de 3’26 V’ >0 , V creciente y después de 3’26 V’<0, V decreciente. Para $r=3'26 \to h=\dfrac{100-\pi\cdot 10'61}{\pi\cdot 3'26}=6'51\,\text{cm}$

7.- Calcula $\int (x^2-1)e^{-x}dx$, la hacemos por partes:

$$\int (x^2-1)e^{-x}dx = -(x^2-1)e^{-x}-\int 2x(-e^{-x})dx=-(x^2-1)e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}dx=$$

$$\left.\begin{matrix} u=x^2-1 \\ dv=e^{-x}dx \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} du=2x\,dx \\ v=-e^{-x} \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} u=x \\ dv=e^{-x}dx \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} du=dx \\ v=-e^{-x} \end{matrix}\right\}$$

$$=-(x^2-1)e^{-x}+2\left[-x\cdot e^{-x}+e^{-x}\right]+C=(-x^2-2x+3)e^{-x}+C$$