EXAMEN ANÁLISIS 1

Nombre:... **Grupo:**...............

1. [2,5 puntos] Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\\0&3\end{pmatrix}$

Determina la matriz X que verifica $AX-B^t=2C$ (B^t es la matriz traspuesta de B)

2. Calcula:
   a) [0,75 puntos] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$
   b) [0,75 puntos] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}$

3. Considera que la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=\begin{cases}3ax+b & \text{si } x\le 0\\ e^{x(ax+b)} & \text{si } x>0\end{cases}$
   a) [1,5 puntos] Determina a y b sabiendo que f es derivable.
   b) [1 punto] Para a = 1 y b = 1 halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 1.

4. [1,5 puntos] Estudia la continuidad y derivabilidad de la función. Calcula su función derivada.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1}$$

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones [0,5 puntos cada una]:

a) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

b) $g(x)=\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^2$

c) $h(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2+5}}$

d) $j(x)=e^{4x}\cdot \operatorname{sen} x$

SOLUCIÓN

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

Determina la matriz X que verifica

$$AX-B^t=2C \to AX=B^t+2C \to A^{-1}AX=A^{-1}\left(B^t+2C\right) \to X=A^{-1}\left(B^t+2C\right)$$

$$B^t+2C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\\ 0 & 7\end{pmatrix};\ |A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=1-2+1+4=4$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & -2 & -2\\ -1 & -3 & -5\end{pmatrix}^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & -2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\\ 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4} & -\frac{9}{2}\\ -\frac{7}{4} & -\frac{15}{2}\end{pmatrix}$$

2. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+4x}\right)=(\infty-\infty)\text{INDETERMINACIÓN}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+4x}\right)\left(\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+4x}\right)}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+4x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x-x^2-4x}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+4x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+4x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}\text{INDETERMINACIÓN}$

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1-2}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

3. Considera que la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=\begin{cases}3ax+b & si\ x\le 0\\ e^{x(ax+b)} & si\ x>0\end{cases}$

a) Determina a y b sabiendo que f es derivable.

$$f(x)=\begin{cases}3ax+b & si\ x\le 0\to \text{polinómica, continua y derivable en } (-\infty,0)\\ e^{x(ax+b)} & si\ x>0\to \text{exponencial, continua y derivable en } (0,+\infty)\end{cases}$$

Tiene que ser continua y derivable en 0:

Continuidad en x = 0

$$\begin{cases}f(0)=b\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3ax+b)=b\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x(ax+b)}=e^0=1\end{cases}$$

$b=1$

Derivabilidad en x = 0

$$f'(x)=\begin{cases}3a & si\ x<0\\ e^{(ax^2+bx)}(2ax+b) & si\ x>0\end{cases}$$

$$\begin{matrix}f'(0^-)=3a\\ f'(0^+)=e^0\cdot b=1\end{matrix}\quad 3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

b) Para a = 1 y b = 1 halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 1.

$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & si\ x\le 0\\ e^{x(x+1)} & si\ x>0\end{cases}$$

recta TANGENTE: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$$f'(x)=\begin{cases}3 & si\ x<0\\ e^{x(x+1)}\cdot(2x+1) & si\ x>0\end{cases}\to f'(1)=e^2\cdot 3=3e^2$$

Ecuación pedida: $y-e^2=3e^2(x-1)\Rightarrow y=3e^2x-2e^2$

4. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función. Calcula su función derivada.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1}\to x^4-1=0\Rightarrow(x^2-1)(x^2+1)=0\Rightarrow x=\left\langle\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\right.$$

Tiene "problemas" en 1 y -1, veamos de qué tipo son:

Continuidad en x = 1: No existe $f(1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1}=\frac{4}{0}\left\langle\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\end{matrix}\right.$$ Discontinuidad salto infinito

Continuidad en x = -1: No existe $f(-1)$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1}=\left(\frac{0}{0}\right)IND=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{2}$$

Discontinuidad evitable. La función es continua en $R-\{-1,1\}$

Por lo tanto, la función es derivable en $R-\{-1,1\}$

Función derivada:

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2x+1)(x^4-1)-(x^3+x^2+x+1)4x^3}{(x^4-1)^2}=\frac{-x^6-2x^5-3x^4-4x^3-3x^2-2x-1}{(x^4-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x+1)(-x^4-2x^2-1)}{(x^2-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{-(x^4+2x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\rightarrow f'(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x(1+\cos x)-(1-\cos x)(-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2}=\dfrac{2\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$

b) $g(x)=\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^2\rightarrow g'(x)=2\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)\cdot\dfrac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2(2x+1)}{(x+1)^3}$

c) $h(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2+5}}\rightarrow h'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2+5}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2+5}}}\cdot\dfrac{2x(x^2+5)-(x^2+3)2x}{(x^2+5)^2}$

$$h'(x)=\frac{1}{2\dfrac{x^2+3}{x^2+5}}\cdot\frac{2x^3+10x-2x^3-6x}{(x^2+5)^2}=\frac{4x}{2(x^2+3)(x^2+5)}=\frac{2x}{(x^2+3)(x^2+5)}$$

d) $j(x)=e^{4x}\cdot\operatorname{sen} x\rightarrow j'(x)=e^{4x}\cdot 4\cdot\operatorname{sen} x+e^{4x}\cdot\cos x=e^{4x}(4\operatorname{sen} x+\cos x)$