EXAMEN ANÁLISIS / MATRICES Y DETERMINANTES

1. Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}$

   a) Halla, si existe, la matriz inversa de AB+C (1,25 puntos)

   b) Calcula, si existen, los números reales x e y que verifican: $C\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (1,25 puntos)

2. Calcula:

   a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ (1,25 puntos)

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$ (1,25 puntos)

3. Se sabe que la función $f:[0,5]\to\Re$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & 0\le x<2\\ -4+\sqrt{x-1} & 2\le x<5\end{cases}$$ es derivable en el intervalo (0,5)

   a) Calcula las constantes a y b. (1,5 puntos)

   b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 2. (1 punto)

4. Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones:

   a) $f(x)=x^2\left|x-5\right|$ (1,25 puntos)

   b) $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ (1,25 puntos)

SOLUCIONES

1. $A=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}$

a) $D=AB+C=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -3\\4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -5\\10 & 8\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}-7 & -5\\10 & 8\end{vmatrix}=-6 \Rightarrow \exists D^{-1}$, vamos a hallarla:

$$Adj(D)=\begin{pmatrix}8 & -10\\5 & -7\end{pmatrix}\rightarrow (Adj(D))^t=\begin{pmatrix}8 & 5\\-10 & -7\end{pmatrix}\rightarrow D^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-8 & -5\\10 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3} & -\frac{5}{6}\\\frac{5}{3} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

b) $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-x-2y\\6x+6y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\3y\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}-x-2y=3x\\6x+6y=3y\end{array}\right\}y\rightarrow\left.\begin{array}{l}4x+2y=0\\6x+3y=0\end{array}\right\}\rightarrow 2x+y=0\rightarrow y=-2x$$

solución: $\begin{cases}x=t\\y=-2t\end{cases}$

2. a) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^2-1-2\ln x}{(x^2-1)\ln x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)\underline{\underline{L'Hôpital}}$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2x-\frac{2}{x}}{2x\ln x+\frac{x^2-1}{x}}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{2x^2-2}{2x^2\ln x+x^2-1}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)\underline{\underline{L'Hôpital}}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{4x}{4x\ln x+2x+2x}\right)=\frac{4}{2+2}=1$$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg\,x-x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)\underline{\underline{L'Hôpital}}\lim\limits_{x\to0}\frac{1+tg^2\,x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{tg^2\,x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\underline{\underline{L'Hôpital}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2tg\,x(1+tg^2x)}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{2tg\,x+2tg^3x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)\underline{\underline{L'Hôpital}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(1+tg^2x)+6tg^2x(1+tg^2x)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

3. Se sabe que la función $f:[0,5]\rightarrow\Re$ es derivable en el intervalo $(0,5)$

a)

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & 0\le x<2 \to \text{polinómica} \to \text{cont.y derivable en}(0,2) \\ -4+\sqrt{x-1} & 2\le x<5 \to \text{cte}+\text{raiz}(\text{dom}=[1,+\infty)) \to \text{cont.y deriv.}(2,5) \end{cases}$$

Tiene que ser continua y derivable en x = 2

Continuidad en x = 2

$$f(2)=-4+\sqrt{2-1}=-3$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} ax+bx^2 = 2a+4b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \left(-4+\sqrt{x-1}\right)=-3 \end{array}\right\} \to 2a+4b=-3$$

Derivabilidad en x = 2

$$f'(x)=\begin{cases} a+2bx & 0<x<2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & 2<x<5 \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} f'(2^-)=a+4b \\ f'(2^+)=\dfrac{1}{2\sqrt{2-1}}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to a+4b=\frac{1}{2}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+4b=-3 \\ a+4b=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 2a+4b=-3 \\ 2a+8b=1 \end{array}\right\} 4b=4 \Rightarrow b=1 \to a=\frac{1}{2}-4=-\frac{7}{2}$$

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 2.

$$f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2-1}}=\frac{1}{2} \qquad f(2)=-4+\sqrt{2-1}=-3$$

Recta tangente: $y+3=\frac{1}{2}(x-2) \to y=\frac{1}{2}x-4$

4. Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones:

a) $f(x)=x^2|x-5|=\begin{cases} x^2(-x+5) \text{ si } x<5 \\ x^2(x-5) \quad \text{si } x\ge 5 \end{cases}=\begin{cases} -x^3+5x^2 & \text{si } x<5 \\ x^3-5x^2 & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$

Cada trozo es continuo y derivable, ya que son polinomios, habrá que ver qué pasa en el punto $x=5$

Continuidad: $f(5)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-} -x^3+5x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} x^3+5x^2 = 0 \end{array}\right\} \to \text{Continua}$$

Derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases} -3x^2+10x & \text{si } x<5 \\ 3x^2-10x & \text{si } x\ge 5 \end{cases} \to \begin{cases} f'(5^-)=-3\cdot 5^2+50=-25 \\ f'(5^+)=3\cdot 5^2-50=25 \end{cases}$$

No es derivable en x = 5

b) $g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$, función racional, primero hallamos el dominio

$$x^2+x-2=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left\langle\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$$

$Dom\, g(x)=\Re-\{-2,1\}$, luego los problemas de continuidad (y derivabilidad) los tendrá en los puntos -2 y 1

Estudiemos la continuidad en -2

$g(-2)=$ no existe

$$\lim_{x\to -2^-} g(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} g(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Discontinuidad de salto infinito en -2, (asíntota vertical), luego no es derivable tampoco.

Estudiemos la continuidad en 1

$g(1)=$ no existe

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x+2)}=\frac{2}{3}$$

Discontinuidad evitable en 1, luego no es derivable tampoco.

La función es continua y derivable en su dominio.