EXAMEN ANÁLISIS (2) Noviembre 2009

1. Haz un estudio lo más completo posible y representa gráficamente la función $f: \Re \to \Re$ definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ (4 puntos)

2. De todas las primitivas de la función $f(x) = \frac{\cos x}{\text{sen}^3 x}$ encuentra la que pasa por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. (1,5 puntos)

3.- Halla las siguientes integrales: (4,5 puntos)

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

b) $\int x^2 e^{2x-1} dx$

c) $\int (x-2)\sqrt{x^2-4x}\,dx$

d) $\int x \ln x\,dx$

SOLUCIONES

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ Dominio $\Re - \{0\}$ y es continua y derivable en su dominio.

Simetría $f(-x) = e^{-\frac{1}{x}}$ NO es simétrica, ni par ni impar

Asíntotas:

Verticales: $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \end{cases}$ A.V : x=0, por la derecha.

Horizontales: $\lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{0} = 1 \end{cases}$ A.H. : y=1

No tiene asíntotas oblicuas

Monotonía: $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} = 0$ no tiene extremos

sg[f']	-	0	-
f es	decreciente		decreciente

f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Concavidad: $f''(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^2 + e^{\frac{1}{x}} \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 2xe^{\frac{1}{x}}}{x^4} = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}(1+2x) = 0$

$\Rightarrow 1 + 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ posible punto de inflexión

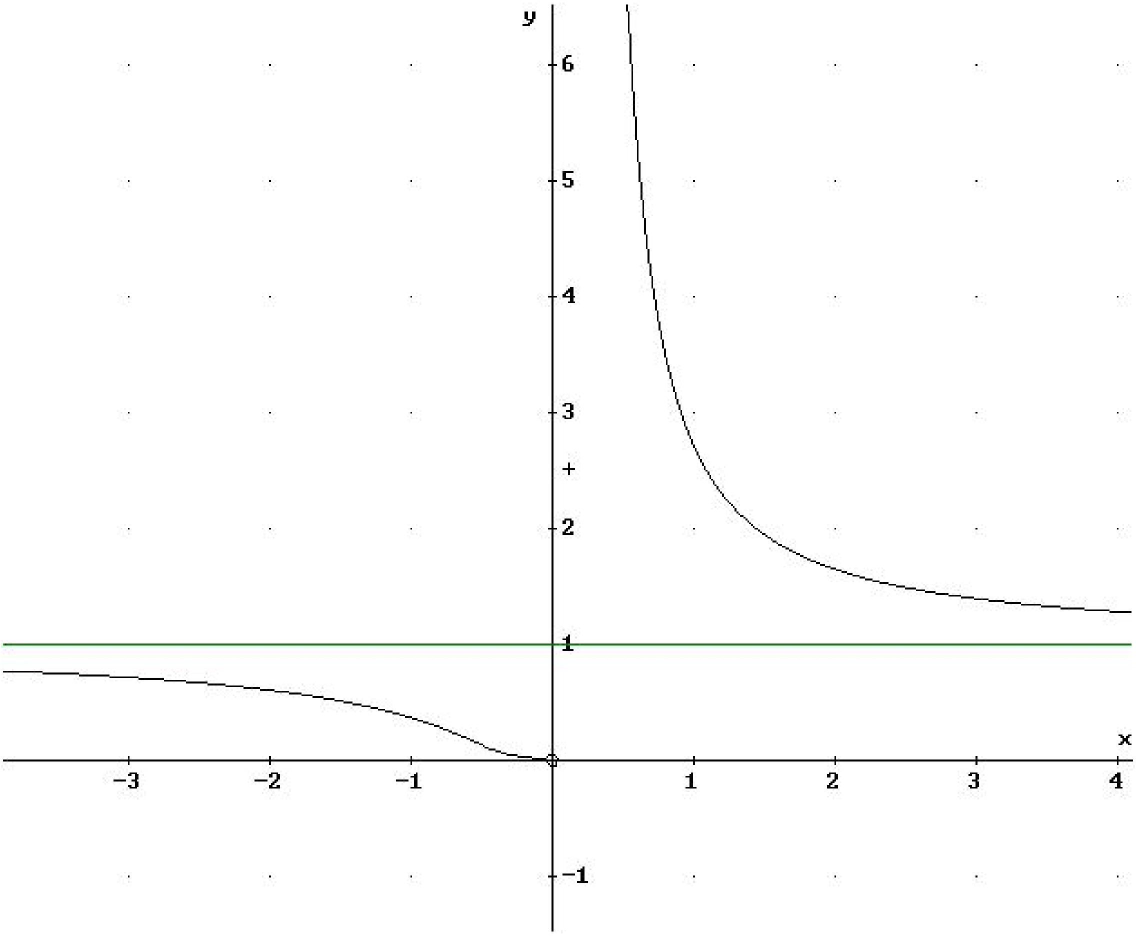
sg[f'']	-	-1/2	+	0	+
f es					

Cóncava en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

Convexa en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$

Tiene un punto de inflexión: $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$

Puntos de corte con los ejes:
No corta a ninguno, esta función es siempre positiva (es decir, su gráfica está siempre por encima del eje OX)



2. Primitivas de la función $f(x)=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$,la que pasa por el punto $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}dx=\int\frac{dt}{t^3}=\int t^{-3}dt=\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}+C$$

$$\left.\begin{array}{l} t=\operatorname{sen}x \\ dt=\cos x\,dx \end{array}\right\}\text{Cambio de variable}$$

Primitivas:

$$F(x)=-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}+C\rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}+C=0\Rightarrow -\frac{1}{2}+C=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

La primitiva pedida es, por tanto: $F(x)=-\dfrac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}+\dfrac{1}{2}$

3.- a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}=\int\frac{1/3}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{9}}}dx=\int\frac{1/3}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{3}\right)+C$

b) $\int x^2e^{2x-1}dx=\frac{x^2}{2}e^{2x-1}-\int xe^{2x-1}dx=\frac{x^2}{2}e^{2x-1}-\left[\frac{x}{2}e^{2x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x-1}dx\right]=$

$$\left.\begin{array}{l}u=x^2\\ dv=e^{2x-1}dx\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}du=2xdx\\ v=\frac{1}{2}e^{2x-1}\end{array}\right\}\text{por partes}\qquad \left.\begin{array}{l}u=x\\ dv=e^{2x-1}dx\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}du=dx\\ v=\frac{1}{2}e^{2x-1}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{x^2}{2}e^{2x-1}-\frac{x}{2}e^{2x-1}+\frac{1}{4}e^{2x-1}+C=e^{2x-1}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)+C$$

c) $\int(x-2)\sqrt{x^2-4x}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{\sqrt{t^3}}{3}+C=(*)$

$$\left.\begin{array}{l}t=x^2-4x\\ dt=2x-4\,dx=2(x-2)dx\end{array}\right\}\text{cambio de variable}\quad (*)=\frac{\sqrt{(x^2-4x)^3}}{3}+C$$

d) $\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2x}dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+C=(*)$

$$\left.\begin{array}{l}u=\ln x\\ dv=x\,dx\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}\text{por partes}\quad (*)=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+C=$$