EXAMEN DE MATEMÁTICAS – 3ª EVALUACIÓN – 2º BACH.

1) Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{array}\right\}$$

.

(a) [1'5 puntos] Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema que se obtiene para $a = -2$.

2) De la función $f : R \to R$ se sabe que $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

(a) [1'25 puntos] Determina f.

(b) [1'25 puntos] Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

3) Considera la función $f : R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{si } x \le 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a)[1'5 puntos] Determina a y b sabiendo que f es derivable en R.

(b)[1 punto] Halla los extremos locales de f.

4) Dadas las funciones $f : R \to R$ y $g : R \to R$ definidas por

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \qquad \text{y} \qquad g(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

(a) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

(b) [1 punto] Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

SOLUCIÓN

1) Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{array}\right\} \to A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad A^*=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

(a) Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

$$|A|=-a^2+1+1+a-a-1=-a^2+1 \quad \to -a^2+1=0 \Rightarrow a=\pm 1$$

Estudiemos qué pasa en cada caso:

Para a = -1

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A)=2;\quad A^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dos filas IGUALES (2ª Y 3ª)$\Rightarrow r(A^*)=2$ Sistema Compatible Indeterminado

Para a = 1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A)=2;\quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3+1+4+4-1-3 \neq 0 \Rightarrow r(A^*)=3 \text{ Sistema Incompatible}$$

Lo resolvemos para a = -1, nos quedamos con dos ecuaciones y hacemos $z=\lambda$

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} -x+y=4-\lambda \\ x+y=1-\lambda \end{array}\right\} \to 2y=5-2\lambda \Rightarrow Sol\left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{5}{2}-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

(b) Resuelve el sistema que se obtiene para $a=-2$.

$$\left.\begin{array}{l} -2x+y+z=4 \\ x+2y+z=1 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \to A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad A^*=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A|=-4+1+1-2+2-1=-3 \quad \to r(A)=3=r(A^*)$ S. Compatible Determinado, lo resolvemos por Cramer, y tenemos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3}=-\frac{4}{3} \quad ; y=1; z=\frac{1}{3}$$

2) De la función $f: R \to R$ se sabe que $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

(a) Determina f.

$$f(x) = \int \frac{3}{(x+1)^2} dx = 3\int (x+1)^{-2} dx = 3\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{3}{x+1} + C$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2+1} + C = 0 \Rightarrow -1 + C = 0 \Rightarrow C = 1 \to f(x) = -\frac{3}{x+1} + 1$$

(b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.

$$\int \left(-\frac{3}{x+1} + 1\right) dx = -3\,ln|x+1| + x + C \to -3\,ln|1| + 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

La primitiva pedida es $F(x) = -3\,ln|x+1| + x + 1$

3) Considera la función $f: R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{si } x \le 1, \text{ polinómica, continua y derivable en } (-\infty, 1) \\ \ln x & \text{si } x > 1, \text{ logaritmo, continua y derivable en } (1, +\infty) \end{cases}$$

(a)Determina a y b sabiendo que f es derivable en R.

Tiene que ser continua y derivable en x = 1

Continuidad en x = 1:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = a + b \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} ax^2 + b = a + b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = \ln 1 = 0 \end{array}\right\} a + b = 0$$

Derivabilidad en x = 1

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \to f'(1^-) = 2a + b = f'(1^+) = \frac{1}{1} \Rightarrow 2a + b = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{array}\right\} \to a = 1,\ b = -1$$

(b)Halla los extremos locales de f. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \le 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x} = 0, \text{no} \end{cases}$$

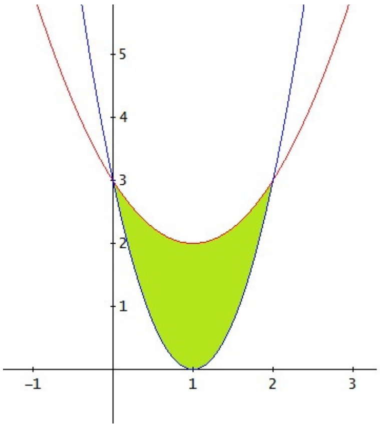
Posibles extremos: $\dfrac{1}{2}, 1$, vamos a comprobarlo:

sg f'	-		+		+
f es	decrec	1/2	crec	1	crec

Mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

4) Dadas las funciones $f: R \to R$ y $g: R \to R$ definidas por

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \qquad y \qquad g(x) = 3x^2 - 6x + 3$$



(a) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Hallamos los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = 3x^2 - 6x + 3 \end{array}\right\} 3x^2 - 6x + 3 = x^2 - 2x + 3$$

$$2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \to \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$A = \int_0^2 (x^2 - 2x + 3) - (3x^2 - 6x + 3)dx$$

$$A = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx = \left. -2\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3} \text{u.a.}$$

(b) Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

$f(x) = x^2 - 2x + 3$, Recta tangente: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$f'(x) = 2x - 2$, $f'(2) = 4 - 2 = 2$, $f(2) = 4 - 4 + 3 = 3$

Recta tangente: $y - 3 = 2(x - 2) \to y = 2x - 1$

Recta normal: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \to y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x - 2) \to y = -\dfrac{x}{2} + 4$