MATEMÁTICAS II

EXAMEN ANÁLISIS - GEOMETRÍA

Nombre:………………………………………………………………………………………… **Grupo:**……………

1. [2 puntos] Se divide un segmento de longitud 20 cm en dos trozos. Con unos de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y el rectángulo sea mínima.

2. Calcula:

   a) [1,25 puntos] $\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)\,\text{sen}\,x}{x^3 - x^2}$

   b) [1,25 puntos] $\int (x+3) \cdot e^{-x} dx$

3. Se considera que la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde ln significa logaritmo neperiano.

   a) [1,25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos y los intervalos de concavidad y convexidad de la función.

   b) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de f.

   c) [1 punto] Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

4. Se consideran el punto P(1, 0, 1), la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$. Se pide:

   a) [1,25 puntos] Obtener el punto P’, simétrico de P respecto del plano π.

   b) [1,25 puntos] Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π.

SOLUCIÓN

1. Se divide un segmento de longitud 20 cm en dos trozos. Con unos de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y el rectángulo sea mínima.

Longitud del trozo del cuadrado 4x, cada lado medirá x

Longitud del trozo del rectángulo 6y, con base 2y y altura y

Áreas: $Ac = x^2$ y $Ar = 2y \cdot y = 2y^2$, Suma: $A = x^2 + 2y^2$

Relación entre x e y: $4x + 6y = 20 \Rightarrow y = \dfrac{20-4x}{6} \Rightarrow y = \dfrac{10-2x}{3}$

Tendremos que hallar el mínimo de la función: $A = x^2 + 2y^2 = x^2 + 2\left(\dfrac{10-2x}{3}\right)^2$

Operamos: $A = x^2 + 2\dfrac{100-40x+4x^2}{9} = \dfrac{17x^2 - 80x + 200}{9}$

Derivamos: $A' = \dfrac{34x-80}{9} \to 34x - 80 = 0 \to x = \dfrac{40}{17}$

$A'' = \dfrac{34}{9} > 0 \Rightarrow$ mínimo para $x = \dfrac{40}{17}$ cm

$y = \dfrac{10-2x}{3} = \dfrac{1}{3}\left(10 - \dfrac{80}{17}\right) = \dfrac{30}{17}$ cm

Longitud de cada trozo:

Longitud del trozo del cuadrado $4x = \dfrac{160}{17}$ cm

Longitud del trozo del rectángulo $6y = \dfrac{180}{17}$ cm

2. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \underset{=\!=}{L'H} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \operatorname{sen} x + (e^x - 1)\cos x}{3x^2 - 2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \underset{=\!=}{L'H}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + e^x \cos x - (e^x - 1)\operatorname{sen} x}{6x - 2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x \cos x - \operatorname{sen} x}{6x - 2} = \dfrac{2}{-2} = -1$

b) $\int (x+3)\cdot e^{-x}dx$ la hacemos por partes:

$\left.\begin{matrix} u = x+3 \\ dv = e^{-x}dx \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{matrix}\right\} \to \int (x+3)\cdot e^{-x}dx = -(x+3)\,e^{-x} - \int -e^{-x}dx =$

$-(x+3)\,e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+3)\,e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+4) + C$

3. Se considera que la función $f(x) = \ln(1+x^2)$, donde ln significa logaritmo neperiano.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos y los intervalos de concavidad y convexidad de la función.

$f(x) = \ln(1+x^2) \to f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \to 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ posible extremo

Sg f'	-	0	+
f es	decreciente		creciente

Mínimo en (0, 0)

f es creciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,+\infty)$

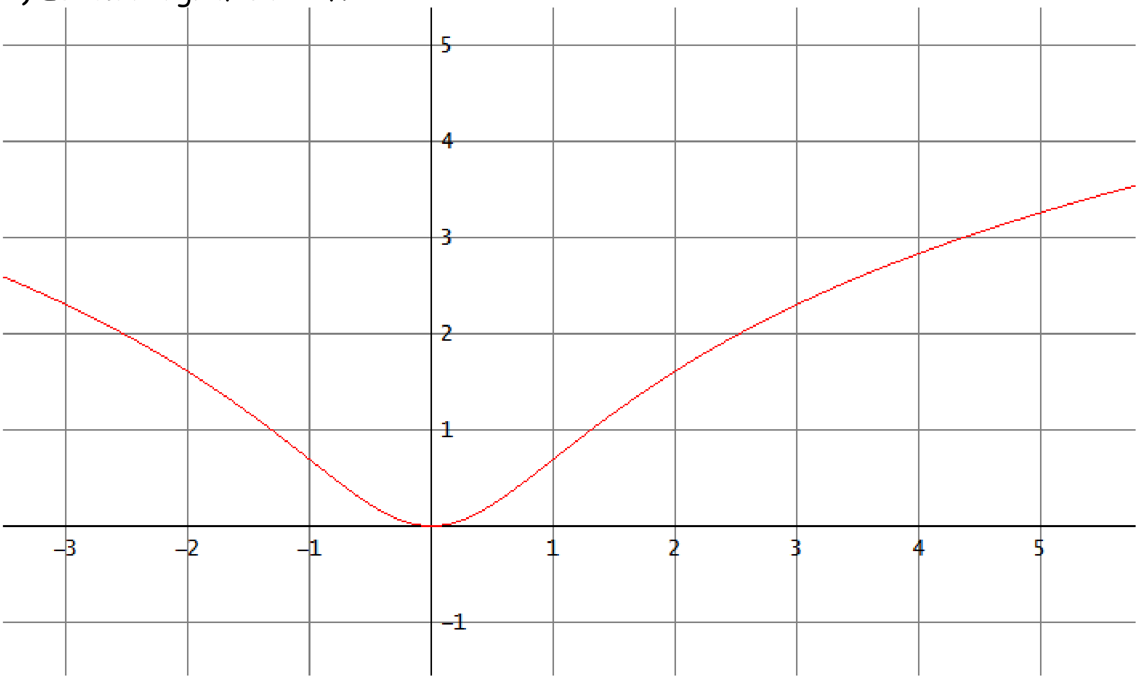
$f''(x) = \dfrac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2} \to -2x^2 + x = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ posibles puntos de inflexión

Sg f''	-	-1	+	1	-
f es	$\cap$		$\cup$		$\cap$

PI en (-1, ln2) y (1, ln2)

f es cóncava en $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ y convexa en $(-1,1)$

b) Esboza la gráfica de f.



c) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Tangentes: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ con $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

En (-1, ln2) $\to f'(-1) = \dfrac{-2}{1+1} = -1$, en (1, ln2) $\to f'(1) = \dfrac{2}{1+1} = 1$,

Tangente en (-1, ln2) $y - \ln 2 = -(x+1) \to y = -x - 1 + \ln 2$

Tangente en (1, ln2) $y - \ln 2 = (x-1) \to y = x - 1 + \ln 2$

Normal en (-1, ln2) $y - \ln 2 = (x+1) \to y = x + 1 + \ln 2$

Normal en (1, ln2) $y - \ln 2 = -(x-1) \to y = -x + 1 + \ln 2$

4. Se consideran el punto P(1, 0, 1), la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$. Se pide:

a) Obtener el punto P', simétrico de P respecto del plano π

Para ello, hallamos la recta r', perpendicular al plano dado y que pase por P

Su vector de dirección será el normal del plano: $\vec{d} = \vec{n} = (1,1,1)$ y pasa por el punto P, luego la ecuación será:

$r' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ ahora hallamos el punto M, intersección de r' con el plano, este punto M será el punto medio del segmento PP', con lo que ya calcularemos P'

$(1+\lambda) + \lambda + (1+\lambda) = 0 \Rightarrow 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$ sustituimos en r', para hallar M:

$$M = \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+0}{2}, \frac{c+1}{2}\right) \to \begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{a+1}{2} \\ -\frac{2}{3} = \frac{b}{2} \\ \frac{1}{3} = \frac{c+1}{2} \end{cases}$$ de donde

tendremos que el punto simétrico P' es el punto $P'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

b) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π.

Para encontrar s, vamos a hallar el plano que pasa por P y contiene a r (en ese plano tiene que estar contenida s) y también el plano que es paralelo a π y pasa por P (en ese plano TAMBIÉN tiene que estar contenida s), la intersección de ambos planos nos dará la recta pedida.

Plano que pasa por P y contiene a r:

Punto P(1, 0, 1) vectores de dirección: el de s $\vec{d} = (1,2,-1)$ y el PQ (siendo Q un punto de s), es decir: $\vec{e} = (1-1, 0-0, -1-1) = (0,0,-2)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x + 4 + 2y = 0 \to \pi' \equiv 2x - y - 2 = 0$$

Plano que pasa por P y es paralelo a π:

Paralelo a π, tendrá la forma $x + y + z + D = 0$, pasa por P

$\to 1 + 0 + 1 + D = 0 \to D = -2 \Rightarrow \pi'' \equiv x + y + x - 2 = 0$

La recta s, será por tanto: $s \equiv \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$