EXAMEN DE MATEMÁTICAS – 3ª EVALUACIÓN – 2º BACH.-8-IV-2011

GEOMETRÍA - ANÁLISIS

1) Considera el plano π de ecuación $2x+2y-z-6=0$ y la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$$

   (a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados. *(1,25 puntos)*

   (b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π. *(1,25 puntos)*

2) Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x)=(x-2)\cdot e^{x}$.

   (a) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan). *(1 punto)*

   (b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión. *(1,5 puntos)*

3) Calcula las integrales:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^2+4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$ (b) $\displaystyle\int x^2\cdot e^{8x}dx$

(2,5 puntos)

4) En una fábrica se dispone de planchas de metal cuadradas de 1m de lado. ¿Qué longitud debe tener el lado del cuadrado que debe cortarse en cada vértice para poder hacer una caja abierta de volumen máximo?

(2,5 puntos)

SOLUCIONES

1) Considera el plano π de ecuación $2x+2y-z-6=0$ y la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$$

(a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Puntos de corte:

Eje OX: $2x+0-0-6=0 \to x=3 \to A(3,0,0)$

Eje OY: $0+2y-0-6=0 \to y=3 \to B(0,3,0)$

Eje OZ: $0+0-z-6=0 \to z=-6 \to C(0,0,-6)$

$\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,0,-6)$ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 3 & 0\\ -3 & 0 & -6\end{vmatrix}=-18\vec{i}-18\vec{j}+9\vec{k}$

Área triángulo ABC: $A=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\dfrac{\sqrt{(-18)^2+(-18)^2+9^2}}{2}=\dfrac{27}{2}u^2$

(b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π.

Recta r en paramétricas: $\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=-1-\lambda\\ z=2\lambda\end{cases}$ estudiamos la posición relativa de la recta y el plano: $2(1+2\lambda)+2(-1-\lambda)-2\lambda-6=0 \to 0\lambda=6$ No tiene solución, luego la recta y el plano son paralelos. Para hallar la distancia cogemos un punto de la recta y hallamos la distancia de ese punto al plano: $P(1,-1,0)$

Recta *s* que pasa por P y es perpendicular al plano (su vector director es el normal del plano: $\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=-\lambda\end{cases}$, hallamos ahora la intersección de esta recta y el plano

$$2(1+2\lambda)+2(-1+2\lambda)-(-\lambda)-6=0 \to 9\lambda=6 \to \lambda=\frac{2}{3}$$

$$Q\begin{cases}x=1+2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{3}\\ y=-1+2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3} \to Q\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)\to\\ z=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$$d(r,\pi)=d(P,Q)=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{36}{9}}=2u$$

2) Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = (x-2)\cdot e^x$.

(a) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

$f'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x = 0 \Rightarrow x = 1$

Si $x < 1 \to f'(x) < 0$ y si $x > 1 \to f'(x) > 0$, luego en el punto de abscisa 3 tenemos un mínimo $\to$ Mínimo$(1,-e)$

(b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Hallemos el punto de inflexión $f''(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$

Si $x < 0 \to f''(x) < 0 \to \cap$ y si $x > 0 \to f'(x) > 0 \to \cup$, luego en el punto de abscisa 4 tenemos un punto de inflexión $\to$ PI$(0,-2)$

Recta tangente: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$f'(0) = (0-1)e^0 = -1 \to y + 2 = -1(x-0) \to y = -x-2$

3) Calcula las integrales:

(a) $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}dx$, como el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero dividimos:

					x^3	$-2x^2$	$+x$
x^4		$-3x^2$	$+4x$	$+1$	x	$+2$	
$-x^4$	$+2x^3$	$-x^2$					
	$2x^3$	$-4x^2$	$+4x$	$+1$			
	$-2x^3$	$+4x^2$	$-2x$				
			$+2x$	$+1$			

$$x^4 - 3x^2 + 4x + 1 = (x^3 - 2x^2 + x)\cdot(x+2) + (2x+1)$$

$$\int \frac{x^4 - 3x^2 + 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}dx = \int (x+2)dx + \int \frac{2x+1}{x^3 - 2x^2 + x}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \mathrm{I}$$

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$$

$$\frac{2x+1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \to 2x + 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$x = 0 \to 1 = A$

$x = 1 \to 3 = C$ $\qquad \to \frac{2x+1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$

$x = -1 \to -1 = 4 + 2B - 3 \to B = -1$

$$\mathrm{I} = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + K$$

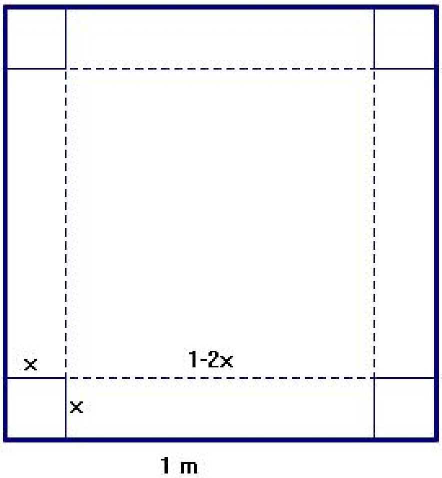
$$\int \frac{x^4 - 3x^2 + 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + K$$

(b) $\int x^2 \cdot e^{8x}dx = \frac{x^2}{8}e^{8x} - \frac{2}{8}\int x\, e^{8x}dx = \frac{x^2}{8}e^{8x} - \frac{1}{4}\left[\frac{x}{8}e^{8x} - \frac{1}{8}\int e^{8x}dx\right] =$

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^{8x}dx \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} du = 2x\, dx \\ v = \frac{1}{8}e^{8x} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{8x}dx \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{8}e^{8x} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{x^2}{8}e^{8x} - \frac{x}{32}e^{8x} + \frac{1}{32}\int e^{8x}dx = e^{8x}\left(\frac{x^2}{8} - \frac{x}{32} + \frac{1}{256}\right) + K$$

4) En una fábrica se dispone de planchas de metal cuadradas de 1m de lado. ¿Qué longitud debe tener el lado del cuadrado que debe cortarse en cada vértice para poder hacer una caja abierta de volumen máximo?



Lado del cuadrado base: 1-2x

Altura de la caja x

$V = (1-2x)^2 x = (1 - 4x + 4x^2)\, x$

$V = 4x^3 - 4x^2 + x$ tenemos que hallar el máximo de esta función

$V' = 12x^2 - 8x + 1 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{24} = \frac{8 \pm 4}{24} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{array}\right.$$

$$V'' = 24x - 8 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} V''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{24}{2} - 8 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \\ V''\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{24}{6} - 8 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \end{array}\right.$$

Solución: tendremos que recortar 1/6 de metro de cada esquina