EXAMEN FINAL DE MATEMÁTICAS – 2º BACH.

BLOQUE I - ALGEBRA Y GEOMETRÍA

1) $[2{,}5\ puntos]$ Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & 5 & -1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix},$$

halla la matriz X que cumple que $A\cdot X=\left(B\cdot A^t\right)^t$.

2) Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+\lambda y=\lambda \\ \lambda x+y+(\lambda-1)z=1 \\ \lambda x+y=2+\lambda \end{array}\right\}$$

(a) $[1{,}5\ puntos]$ Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
(b) $[1\ punto]$ Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

3) Considera el punto $P(2,0,1)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x+2y=6\\ z=2\end{cases}$

(a) $[1\ punto]$ Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.
(b) $[1{,}5\ puntos]$ Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

4) $[1{,}5\ puntos]$ Dadas las rectas:

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{3} \qquad s\equiv\begin{cases}x=t\\ y=2+2t\\ z=3+3t\end{cases},$$

estudia su posición relativa y halla, si existe, la ecuación del plano que las contiene.

BLOQUE II – ANÁLISIS

1) (a) $[1{,}25\ puntos]$ Calcula: $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

(b) $[1{,}25\ puntos]$ Calcula : $\int \frac{2x+1}{(x-1)^2\cdot(x-2)}dx$

2) $[2{,}5 puntos]$ Se sabe que la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es tal que $f(0) = 4$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,2)$. Conociendo además que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal, calcula *a, b, c* y *d.*

3) [*2,5 puntos*] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f, definida por $f(x) = 2 - x^2$ y sus tangentes en los puntos de abscisas x=-1 y x=1.

4) Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = 4 - x|x|$

(a) $[0{,}75\ puntos]$ Esboza la gráfica de f.

(b) $[1\ punto]$ Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$.

(c) $[0{,}75\ puntos]$ Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica en el punto de abscisa $x = 1$.

Los alumnos que tienen un bloque realizarán los 4 ejercicios del mismo.
Los que tienen TODO harán los TRES PRIMEROS ejercicios de cada bloque (Todos los ejercicios puntúan lo mismo: 10/6 puntos)

SOLUCIONES

1) $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\3&-2&0\\1&5&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-5&0&3\\1&-1&1\\-2&4&-3\end{pmatrix}$

$A\cdot X=\left(B\cdot A^t\right)^t \rightarrow X=A^{-1}\cdot\left(B\cdot A^t\right)^t$

$|A|=1;\quad A^t=\begin{pmatrix}-1&3&1\\1&-2&5\\0&0&-1\end{pmatrix},\ B\cdot A^t=\begin{pmatrix}-5&0&3\\1&-1&1\\-2&4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&1\\1&-2&5\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$B\cdot A^t=\begin{pmatrix}5&-15&-8\\-2&5&-5\\6&-14&21\end{pmatrix};\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&0\\17&6&-1\end{pmatrix}$

$X=A^{-1}\cdot\left(B\cdot A^t\right)^t=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&0\\17&6&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2&6\\-15&5&-14\\-8&-5&21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&1&-2\\0&-1&4\\3&1&-3\end{pmatrix}$

2) $\left.\begin{array}{r}x+\lambda y=\lambda\\ \lambda x+y+(\lambda-1)z=1\\ \lambda x+y=2+\lambda\end{array}\right\} A=\begin{pmatrix}1&\lambda&0\\\lambda&1&\lambda-1\\\lambda&1&0\end{pmatrix};\ A^*=\begin{pmatrix}1&\lambda&0&\lambda\\\lambda&1&\lambda-1&1\\\lambda&1&0&2+\lambda\end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix}1&\lambda&0\\\lambda&1&\lambda-1\\\lambda&1&0\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=\left(\lambda^2-1\right)(\lambda-1)=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}\lambda=1\\\lambda=-1\end{array}\right.$

Para $\lambda=1$ $A^*=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&1\\1&1&0&3\end{pmatrix}\rightarrow r(A)=1,\ r\left(A^*\right)=2$ INCOMPATIBLE

Para $\lambda=-1$ $A^*=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\-1&1&-2&1\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow r(A)=2,\ r\left(A^*\right)=2$ (Dos filas iguales)

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Para $\lambda\neq1$ y $\lambda\neq-1\rightarrow r(A)=3,\ r\left(A^*\right)=3$ COMPATIBLE DETERMINADO

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado. ($\lambda = -1$)

$$\left.\begin{array}{r} x-y=-1 \\ -x+y-2z=1 \\ -x+y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=-1 \\ -x+y-2z=1 \end{array}\right\} x=\mu \rightarrow y=1+\mu \rightarrow z=-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}$$

Solución: $\begin{cases} x=\mu \\ y=1+\mu \\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2} \end{cases}$

3) Considera el punto $P(2,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y=6 \\ z=2 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.

$$r \equiv \begin{cases} x=6-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases} \rightarrow Q(6,0,2) \rightarrow \begin{cases} P(2,0,1) \\ \vec{d}(-2,1,0) \\ \vec{e}=\overrightarrow{PQ}=(4,0,1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$\pi \equiv x-2-4z+4+2y=0 \rightarrow x+2y-4z+2=0$

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Plano perpendicular a r y que pasa por P $\rightarrow \vec{n}=\vec{d}(-2,1,0)$

$\pi' \equiv -2x+y+D=0 \rightarrow -2\cdot 2+0+D=0 \Rightarrow D=4 \rightarrow \pi' \equiv -2x+y+4=0$

Hallamos ahora la intersección de este plano y r, será el punto M (punto medio de P y su simétrico P')

$-2(6-2\lambda)+\lambda+4=0 \rightarrow -12+4\lambda+\lambda+4=0 \rightarrow \lambda=\frac{8}{5}$

$$M\begin{cases} x=6-2\cdot\frac{8}{5}=\frac{14}{5} \\ y=\frac{8}{5} \\ z=2 \end{cases} \rightarrow M\left(\frac{14}{5},\frac{8}{5},2\right) \rightarrow P'\begin{cases} \frac{2+x}{2}=\frac{14}{5} \rightarrow x=\frac{18}{5} \\ \frac{y}{2}=\frac{8}{5} \rightarrow y=\frac{16}{5} \\ \frac{z+1}{2}=2 \rightarrow z=3 \end{cases} \quad P'\left(\frac{18}{5},\frac{16}{5},3\right)$$

4) Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{3}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{cases}$

estudia su posición relativa y halla, si existe, la ecuación del plano que las contiene.

En paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+s \\ y = -2+2s \\ z = -3+3s \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2+2t \\ z = 3+3t \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} t - s = 1 \\ 2t - 2s = -4 \\ 3t - 3s = -6 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} t - s = 1 \\ t - s = -2 \\ t - s = -2 \end{matrix}\right\} \text{INCOMPATIBLE}$$

$\vec{d}(1,2,3)$ $\qquad$ $\vec{e}(1,2,3)$ Rectas paralelas

Tomamos un punto de cada recta A de r y B de s $\rightarrow$ A(1,-2,-3), B(0,2,3)

El plano buscado, pasa por A y tiene vectores directores $\vec{d}$ y $\overrightarrow{AB}$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3y - 2z = 0$$

1) a) Calcula:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) L'H = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) L'H = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

b) Calcula : $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)^2\cdot(x-2)}dx = \int \frac{5}{(x-2)}dx + \int \frac{-5}{(x-1)}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx =$

$$= 5\ln|x-2| - 5\ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + C$$

2) Se sabe que la función $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es tal que $f(0) = 4$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,2)$. Conociendo además que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es horizontal, calcula *a, b, c* y *d*. Datos: $f(0) = 4$; $f(1) = 2$ (pasa por el PI); $f''(1) = 0$; $f'(0) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

$$\left.\begin{matrix} d = 4 \\ a+b+c+d = 2 \\ 6a+2b = 0 \\ c = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} d = 4 \\ c = 0 \\ a+b = -2 \\ 6a+2b = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{sol}: \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 4 \end{cases}$$

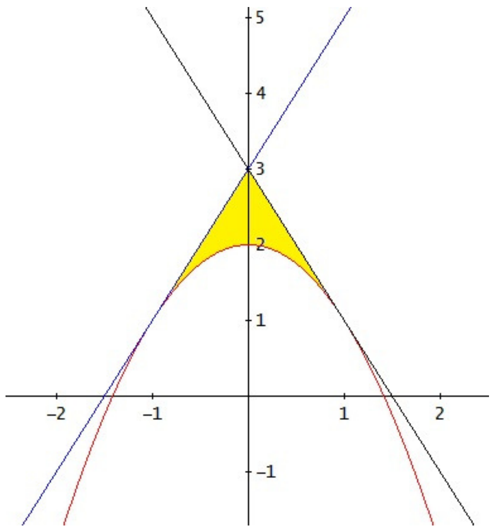
3) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f, definida por $f(x)=2-x^2$ y sus tangentes en los puntos de abscisas x=-1 y x=1.

Calculamos las rectas tangentes:

$f(-1)=1;\quad f(1)=1;\quad f'(x)=-2x \rightarrow f'(-1)=2;\quad f'(1)=-2$

En x = -1: $y-1=2(x+1) \rightarrow y=2x+3$

En x = 1: $y-1=-2(x-1) \rightarrow y=-2x+3$



El área será:

$$A=\int_{-1}^{0}\left(2x+3-2+x^2\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-2x+3-2+x^2\right)dx$$

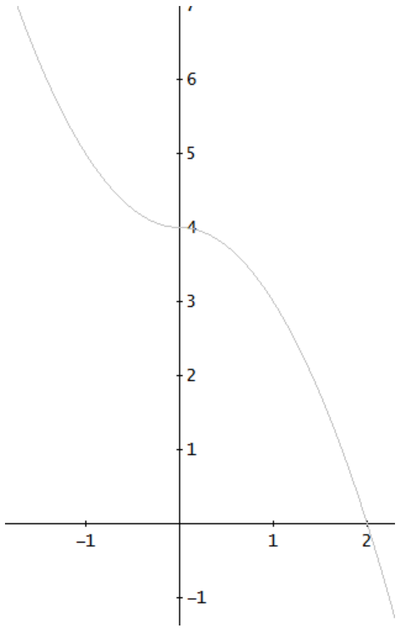
O lo que es lo mismo:

$$A=2\int_{0}^{1}\left(-2x+3-2+x^2\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(x^2-2x+1\right)dx=$$

4) Sea $f: R \rightarrow R$ la función definida por $f(x)=4-x|x|$

a) Esboza la gráfica de $f(x)=4-x|x|=\begin{cases}4-x(-x)=4+x^2 & \text{si } x<0\\ 4-x\cdot x=4-x^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

Son dos trozos de parábola, ambas con vértice en (0,4):



b) Estudia la derivabilidad de f en $x=0$.

Es continua en x= 0

$$f(0)=4=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=4\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=4\end{cases}$$

Derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<0\\ -2x & \text{si } x>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=0\end{cases} \rightarrow \text{es derivable y su}$$

derivada es nula en x = 0

c) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica en el punto de abscisa $x=1$.

$$f(1)=4-1=3;\quad f'(1)=-2 \rightarrow y-3=\frac{1}{-2}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$