CONTROL ÁLGEBRA

1.- Comprueba, sin desarrollar y aplicando las propiedades de los determinantes que: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ (1,5 puntos)

2.- Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) Calcula los valores de λ para los que el determinante de A- 2I es cero.
b) Calcula la matriz inversa de A- 2I para $\lambda = 0$. (Por adjuntos) (3 puntos)

3.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+y+mz=1 \\ my-z=-1 \\ x+2my \quad =0 \end{array}\right\}$$ (4 puntos)

Clasifica el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

4.- Escribe **razonadamente** los siguientes ejemplos: (1,5 puntos)

a) Un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas que sea compatible indeterminado.
b) Un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas que sea incompatible.
c) Un sistema de dos ecuaciones que sea compatible determinado.

SOLUCIÓN

1.- $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & a+c\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix} = (C_3+C_2) = \begin{vmatrix}1 & a & a+b+c\\ 1 & b & a+b+c\\ 1 & c & a+b+c\end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & c & 1\end{vmatrix} = 0$ ya que tiene dos columnas (primera y tercera) iguales.

2.- Sea A la matriz $\begin{pmatrix}3 & 0 & \lambda\\ -5 & \lambda & -5\\ \lambda & 0 & 3\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) Calcula los valores de λ para los que el determinante de A- 2I es cero.

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & \lambda\\ -5 & \lambda & -5\\ \lambda & 0 & 3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda\\ -5 & \lambda-2 & -5\\ \lambda & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & \lambda\\ -5 & \lambda-2 & -5\\ \lambda & 0 & 1\end{vmatrix} = (\lambda-2) - \lambda^2(\lambda-2) = (\lambda-2)(1-\lambda^2) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix}\lambda = 2\\ \lambda = \pm 1\end{matrix}\right.$$

b) Calcula la matriz inversa de A- 2I (= B) para $\lambda = 0$

Para $\lambda = 0$, el determinante es distinto de cero y por lo tanto, existe inversa:

$|B| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -5 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = -2$ Hallamos los adjuntos:

$$B_{11} = \begin{vmatrix}-2 & -5\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -2;\ B_{12} = -\begin{vmatrix}-5 & -5\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 5;\ B_{13} = \begin{vmatrix}-5 & -2\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 0;\ B_{22} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1;\ B_{23} = -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix}0 & 0\\ -2 & -5\end{vmatrix} = 0;\ B_{32} = -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -5 & -5\end{vmatrix} = 5;\ B_{33} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ -5 & -2\end{vmatrix} = -2$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3.- $\left.\begin{matrix}x+y+mz=1\\ my-z=-1\\ x+2my\ \ \ =0\end{matrix}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ 0 & m & -1\\ 1 & 2m & 0\end{pmatrix};\quad A^{*} = \begin{pmatrix}1 & 1 & m & 1\\ 0 & m & -1 & -1\\ 1 & 2m & 0 & 0\end{pmatrix}$

Para discutir el sistema, estudiamos las rangos de la matriz del sistema A y de la ampliada A*:
El rango de A es, por lo menos 2 ya que tiene un menor de segundo orden distinto de cero $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, veamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = -1 - m^2 + 2m \to -m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = 1$$

Para $m = 1$ rango(A) = 2, veamos cuál es el rango de la matriz ampliada:

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene dos columnas iguales (3ª y 4ª), luego el rango es también 2, es decir que rango(A) = rango(A*) = 2 Sistema compatible indeterminado.
Lo resolvemos: (nos quedamos con las ecuaciones en las que está el menor de 2º orden distinto de cero, es decir, quitamos la primera) y hacemos y = t

$$\left.\begin{array}{r} y - z = -1 \\ x + 2y \quad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -z = -1 - t \\ x = -2t \end{array}\right\} \to \text{Solución: } \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Para $m \neq 1$ rango(A) = 3 = rango (A*) Sistema compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + mz = 1 \\ my - z = -1 \\ x + 2my \quad = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = -m^2 + 2m - 1 = -(m-1)^2 \qquad \text{Lo resolvemos por Cramer:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & m & -1 \\ 0 & 2m & 0 \end{vmatrix}}{-(m-1)^2} = \frac{-2m^2 + 2m}{-(m-1)^2} = \frac{-2m(m-1)}{-(m-1)^2} = \frac{2m}{m-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-(m-1)^2} = \frac{m-1}{-(m-1)^2} = \frac{-1}{m-1}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix}}{-(m-1)^2} = \frac{-1 - m + 2m}{-(m-1)^2} = \frac{-1}{m-1}$$

4.- Escribe **razonadamente** los siguientes ejemplos:

a) Un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas que sea compatible indeterminado.

Para que sea compatible indeterminado, tienen que ser los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada iguales pero menores que 3.

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ tiene rango 2, ya que la primera y tercera columnas son proporcionales, si lo ampliamos con la columna $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$, el rango será 2.

Luego un sistema compatible indeterminado sería: $\left.\begin{array}{l} x-z=0\\ 2x+y-2z=1\\ x-y-z=-1\end{array}\right\}$

b) Un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas que sea incompatible.
Tienen que tener rangos distintos las matrices del sistema y ampliada, por ejemplo 2 y 3: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (1^a y 3^a columnas proporcionales)

y $A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ que tiene rango 3, ya que $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$

Luego, un sistema incompatible, de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es:

$\left.\begin{array}{l} x-z=1\\ 2x+y-2z=1\\ x-y-z=1\\ -x+z=1\end{array}\right\}$

c) Un sistema de dos ecuaciones que sea compatible determinado.

Tendrán que ser los dos rangos 2, por ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} x+y=2\\ 2x+y=3\end{array}\right\}$