EXAMEN DE MATEMÁTICAS – 2ª EVALUACIÓN – 2º BACH. 21/12/11

Nombre:____ Grupo:

1) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi : x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s: \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta $r: \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$ (2,5 puntos)

2) Dadas las siguientes rectas:

$r \equiv \frac{x - a}{-2} = \frac{y + 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$

a) Calcula el valor de a de manera que ambas rectas se corten. (1,5 p)
b) Determina el punto de corte. (1,5 p)

3) Consideramos los puntos A(1, 0, -1) y B(2, 1, 0) y la recta $r: \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y contiene a A y B. (1,5 p)
b) Determina si la recta que pasa por los puntos P(1, 2, 1) y Q(3, 4, 1) está contenida en dicho plano. (1,5 p)
c) Halla la intersección del plano obtenido en el apartado a) con los ejes coordenados. (1,5 p)

SOLUTION

1) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi: x+y-z+6=0$ con la recta $s: \frac{x}{3}=y-2=z+1$ y es paralelo a la recta $r: \begin{cases} 3x+y-4=0 \\ 4x-3y+z-1=0 \end{cases}$

Empezamos hallando el punto intersección P de π y s:

Ponemos s en paramétricas $s: \begin{cases} x=3\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$ y sustituimos en el plano π

$3\lambda+(2+\lambda)-(-1+\lambda)+6=0 \Rightarrow 3\lambda+2+\lambda+1-\lambda+6=0 \Rightarrow 3\lambda=-9 \Rightarrow \lambda=-3$

Punto de corte P: $\begin{cases} x=3(-3)=-9 \\ y=2-3=-1 \\ z=-1-3=-4 \end{cases} \rightarrow P(-9,-1,-4)$

La recta que tenemos que hallar pasa por P (3, 3, 0) y tiene vector de dirección el de la recta r, ya que es paralela. Ponemos r en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x+y-4=0 \\ 4x-3y+z-1=0 \end{cases} \rightarrow z=\mu \rightarrow \left.\begin{matrix} 3x+y=4 \\ 4x-3y=1-\mu \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 9x+3y=12 \\ 4x-3y=1-\mu \end{matrix}\right\} \rightarrow 13x=13-\mu$$

$$x=1-\frac{1}{13}\mu \Rightarrow y=4-3x=4-3+\frac{3}{13}\mu=1+\frac{3}{13}\mu \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1-\frac{1}{13}\mu \\ y=1+\frac{3}{13}\mu \\ z=\mu \end{cases} \rightarrow \vec{d}(-1,3,13)$$

Recta pedida: $r' \equiv \begin{cases} x=-9-\mu \\ y=-1+\mu \\ z=-4+13\mu \end{cases}$

2) Dadas las siguientes rectas:

$r \equiv \frac{x-a}{-2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{cases}$

a) Calcula el valor de a de manera que ambas rectas se corten.

Ponemos ambas en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x=a-2\lambda \\ y=-3-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} ;\ s \rightarrow z=\mu \rightarrow 2x=1-\mu \rightarrow x=\frac{1-\mu}{2} \rightarrow y=\mu-\frac{1-\mu}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mu$$

$$s \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

El sistema quedará entonces:

$$\left. \begin{array}{l} a - 2\lambda = \frac{1-\mu}{2} \\ -3 - \lambda = \frac{-1+3\mu}{2} \\ -1 + 2\lambda = \mu \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -4\lambda + \mu = 1 - 2a \\ -2\lambda - 3\mu = 5 \\ 2\lambda - \mu = 1 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1-2a \\ -2 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

r(A)=2, ya que $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, estudiemos el rango de la matriz ampliada, que puede ser 2 o 3:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1-2a \\ -2 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 10 + 2 - 4a + 6 - 12a - 20 + 2 = -16a + 12 = 0 \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

Para $a = \frac{3}{4} \rightarrow r(A^*) = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado, las rectas se cortan en un punto (Secantes)

Para $a \neq \frac{3}{4} \rightarrow r(A^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible, las rectas se cruzan (no son paralelas porque sus vectores de dirección no son proporcionales)

b) Determina el punto de corte, tiene que ser $a = \frac{3}{4}$, tendremos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -4\lambda + \mu = \frac{1}{4} \\ -2\lambda - 3\mu = 5 \\ 2\lambda - \mu = 1 \end{array} \right\}$$, sabemos que $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, quitamos la primera ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} -2\lambda - 3\mu = 5 \\ 2\lambda - \mu = 1 \end{array} \right\} \text{sumando: } -4\mu = 6 \Rightarrow \mu = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2\lambda = 1 - \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$$

Para hallar el punto pedido, podemos sustituir en cualquiera de las dos rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{4} - 2\lambda = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} \\ y = -3 - \lambda = -3 + \frac{1}{4} = -\frac{11}{4} \\ z = -1 + 2\lambda = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{ó} \quad s \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mu = -\frac{1}{2} - \frac{9}{4} = -\frac{11}{4} \\ z = \mu = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

El punto de corte es, por tanto $P\left(\frac{5}{4},-\frac{11}{4},-\frac{3}{2}\right)$

3) Consideramos los puntos A(1, 0, -1) y B(2, 1, 0) y la recta $r:\begin{cases}x+y=1\\x+z=2\end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y contiene a A y B.
Paralelo a r, podemos usar su vector de dirección. Contiene a A y B, Tomamos el punto A, y el vector de dirección $\overrightarrow{AB}$:

$$r:\begin{cases}x+y=1\\x+z=2\end{cases}\to x=\lambda\to z=2-\lambda,\ y=1-\lambda\Rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\y=1-\lambda\\z=2-\lambda\end{cases}\to \vec{d}(1,-1,-1)$$

$\vec{d}'=\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$

Plano pedido:

$$\begin{vmatrix}x-1 & y & z+1\\1 & -1 & -1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-x+1-y+z+1+z+1+x-1-y=0\to -2y+2z+2=0\to y-z-1=0$$

b) Determina si la recta que pasa por los puntos P(1, 2, 1) y Q(3, 4, 1) está contenida en dicho plano.
Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P y Q: $\vec{d}=\overrightarrow{PQ}=(2,2,0)$

$$r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=2+2\lambda\\z=1\end{cases}\to y-z-1=0\Rightarrow 2+2\lambda-1-1=0\Rightarrow \lambda=0$$ no está contenida, la recta y el plano son secantes, se cortan en el punto P, precisamente.

c) Halla la intersección del plano obtenido en el apartado a) con los ejes coordenados.

$y-z-1=0$, con el eje OX: $\begin{cases}x=\lambda\\y=0\\z=0\end{cases}\to -1=0\to$ NO LO CORTA (es paralelo)

$y-z-1=0$, con el eje OY: $\begin{cases}x=0\\y=\mu\\z=0\end{cases}\to \mu-1=0\to\mu=1\Rightarrow M(0,1,0)$

$y-z-1=0$, con el eje OZ: $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=\gamma\end{cases}\to -\gamma-1=0\to\gamma=-1\Rightarrow N(0,0,-1)$