## EXAMEN DE MATEMÁTICAS – 2ª EVALUACIÓN – 2º BACH. 3/02/12

Nombre:_____________________________________________ Grupo:

1) Sea el punto P(2, 3, -1) y la recta r dada por las ecuaciones $r:\begin{cases} x-1=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$

   a. [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P.
   b. [1,5 puntos] Calcula la distancia del punto P a la recta r y determina el punto simétrico de P respecto de r.

2) Dadas las rectas definidas por $r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x=1+\mu \\ y=2 \\ z=1-\mu \end{cases}$

   a. [1,75 puntos] Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.
   b. [0,75 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

3) Dados los planos dados por las ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv ax+y+z=4$$
$$\pi_2 \equiv x-ay+z=1$$
$$\pi_3 \equiv x+y+z=a+2$$

   a. [1,5 puntos] Estudia su posición relativa, según los valores de a.
   b. [1 punto] Resuelve el sistema para a = -1.

4) [2,5 puntos] Calcula el área del triángulo de vértices A(0, 0, 1), B(0, 1, 0) y C, siendo C la proyección ortogonal del punto (1, 1, 1) sobre el plano de ecuación $x+y+z=1$

**SOLUCIÓN**

1) Sea el punto P(2, 3, -1) y la recta r dada por las ecuaciones $r:\begin{cases} x-1=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$

a. Halla la ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P.

Recta en paramétricas: $r:\begin{cases} x=1 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Vector normal del plano es el vector de dirección de r $\rightarrow \vec{n}(0,-2,1)$

$\pi \equiv -2y+z+D=0$ y como este plano pasa por P, verificará la ecuación:

$-2\cdot 3-1+D=0 \Rightarrow D=7 \Rightarrow \pi \equiv -2y+z+7=0$

b. Calcula la distancia del punto P a la recta r y determina el punto simétrico de P respecto de r.

Hallamos el punto intersección, Q de r y $\pi$:

$-2(-2\lambda)+\lambda+7=0 \Rightarrow 5\lambda+7=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{7}{5}$

$Q\begin{cases} x=1 \\ y=-2\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{14}{5} \rightarrow Q\left(1,\frac{14}{5},-\frac{7}{5}\right) \\ z=-\frac{7}{5} \end{cases}$ La distancia de P a r será la distancia de P a Q, es decir: $d(P,r)=\sqrt{(1-2)^2+\left(\frac{14}{5}-3\right)^2+\left(-\frac{7}{5}+1\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$ u.

Para hallar el punto simétrico de P, P': sabemos que Q es el punto medio del segmento PP', o sea que si P'(a,b,c), tendremos que:

$\frac{2+a}{2}=1;\quad \frac{3+b}{2}=\frac{14}{5};\quad \frac{-1+c}{2}=-\frac{7}{5} \Rightarrow P'\left(0,\frac{13}{5},-\frac{9}{5}\right)$

2) Dadas las rectas definidas por $r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x=1+\mu \\ y=2 \\ z=1-\mu \end{cases}$

a. Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.

Estudiemos primero su posición relativa: $r\rightarrow \vec{d}(1,1,0)$; $s\rightarrow \vec{d}'(1,0,-1)$;

$\left.\begin{array}{l} \lambda=1+\mu \\ \lambda=2 \\ 1=1-\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda-\mu=1 \\ \lambda=2 \\ \mu=0 \end{array}\right\}$ sistema incompatible y vectores de dirección NO paralelos, luego las rectas se cruza. Para hallar la perpendicular común:

Punto genérico de $r\rightarrow P(\lambda,\lambda,1)$, Punto genérico de $s\rightarrow Q(1+\mu,2,1-\mu)$

Para que la recta pedida (que será la que pasa por P y Q) sea perpendicular a ambas, tendrá que ser: $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{d}=0$ y $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{d}'=0$ con $\overrightarrow{PQ}\cdot(1+\mu-\lambda, 2-\lambda, -\mu)$
Luego:

$$\left.\begin{array}{l}1+\mu-\lambda+2-\lambda=0\\ 1+\mu-\lambda+\mu=0\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}\mu-2\lambda=-3\\ 2\mu-\lambda=-1\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}-2\mu+4\lambda=6\\ 2\mu-\lambda=-1\end{array}\right\}\Rightarrow 3\lambda=5\Rightarrow\lambda=\frac{5}{3}\to\mu=\frac{1}{3}$$

Punto de r $\to P\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},1\right)$, punto de s $\to Q\left(\frac{4}{3},2,\frac{2}{3}\right)$ y la perpendicular común buscada, será la recta que pasa por P y Q:

$$\overrightarrow{PQ}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\to\vec{d}(-1,1,-1) \qquad r'\equiv\begin{cases}x=\frac{5}{3}+\lambda\\ y=\frac{5}{3}+\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}$$

b. Calcula la distancia entre r y s. Será la distancia entre P y Q:

$$d(r,s)=d(P,Q)=\sqrt{\left(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{3}-2\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}u$$

3) Dados los planos dados por las ecuaciones:

$$\pi_1\equiv ax+y+z=4$$
$$\pi_2\equiv x-ay+z=1$$
$$\pi_3\equiv x+y+z=a+2$$

a. Estudia su posición relativa, según los valores de a.

$$\left.\begin{array}{l}ax+y+z=4\\ x-ay+z=1\\ x+y+z=a+2\end{array}\right\}A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&-a&1\\1&1&1\end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix}a&1&1&4\\1&-a&1&1\\1&1&1&a+2\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&-a&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-a^2+1+1+a-a-1=0\Rightarrow -a^2+1=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm1$$

Para a = 1

$$A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&-1&1&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}\to r(A)=2,\quad r(A^*)=3 \text{ Sistema incompatible}$$

Los planos primero y tercero son PARALELOS y segundo los corta en dos rectas
Para a = - 1

$$A^*=\begin{pmatrix}-1&1&1&4\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\to r(A)=2,\quad r(A^*)=2 \text{ Sistema compatible indeterminado}$$

Los planos segundo y tercero COINCIDEN y el primero los corta en una recta.

Para $a \neq 1$ y $a \neq -1 \rightarrow r(A)=3, \quad r(A^*)=3$ Sistema Compatible determinado
Se cortan en un punto

b. Resuelve el sistema para a = -1. Ya hemos visto que es compatible indeterminado, se cortan en una recta.

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+y=4-z \\ x+y=1-z \end{array}\right\} z=\lambda \rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{3}{2}; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4-\lambda \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-5+2\lambda}{-2}$$

Solución del sistema, la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{5}{2} - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

4) Calcula el área del triángulo de vértices A(0, 0, 1), B(0, 1, 0) y C, siendo C la proyección ortogonal del punto (1, 1, 1) sobre el plano de ecuación $x+y+z=1$

Hallamos la recta perpendicular al plano y que pasa por (1, 1, 1):

El vector director de la recta será el normal del plano (1, 1, 1), entonces la ecuación de la recta será:

$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$ y el punto C será la intersección de la recta r con el plano dado:

$$1+\lambda+1+\lambda+1+\lambda = 1 \rightarrow 3\lambda = -2 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \Rightarrow C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Área del triángulo ABC:

$$\overrightarrow{AB} = (0,1,-1) \quad , \quad \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \; ; \; A = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k} + \frac{1}{3}\vec{i} = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$$

$$A = \frac{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} u^2$$