EXAMEN FINAL MAYO 2010

Completo: Tienes que elegir entre realizar los cuatro ejercicios de la opción A o los cuatro de la opción B

Dos bloques: Tienes que elegir una opción (los dos ejercicios de A o los dos de B) de Análisis y hacer los dos ejercicios (opciones A y B) de Álgebra o Geometría.

Un bloque:

Análisis: Tienes que hacer tres de los cuatro ejercicios de Análisis.

Álgebra o Geometría: Tienes que hacer los dos ejercicios correspondientes.

PUNTUACIÓN: Todos los ejercicios puntúan lo mismo.

OPCIÓN A

1.- Sea $f:\Re\rightarrow\Re$ la función definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & \text{si } x<0\\ 1-mx-x^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

a) Determina m sabiendo que f es derivable.
b) Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

2.- Sean $f:\Re\rightarrow\Re$ y $g:\Re\rightarrow\Re$ las funciones definidas por $f(x)=x^2+ax+b$ y $g(x)=c\,e^{-(x+1)}$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto (-1,2) y tienen en ese punto la misma recta tangente.

a) Calcula los valores de a, b y c.
b) Halla la ecuación de dicha recta tangente.

3.- Considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{l} x-y+z=2\\ x+\lambda y+z=8\\ \lambda x+y+\lambda z=10\end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores de λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda=2$.

4.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,1,-1), es paralela al plano de ecuación $x-y+z=1$ y corta al eje Z.

OPCIÓN B

1.- Sea $f:\Re \to \Re$ la función dada por $f(x)=\left|8-x^2\right|$

a) Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f.

b) Calcula $\int_0^4 f(x)dx$

2.- Sea $f:\Re \to \Re$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x<0 \\ x^2-3x-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad.

b) Determina sus asíntotas.

c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su mínimo relativo.

3.- Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Halla el valor de m para el que la matriz A no tiene inversa.

b) Resuelve el sistema $AX=B$ para m = 2.

4.- Dada la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=z-2$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto A(1,2,3).

b) Determina las coordenadas del punto B, simétrico de A respecto de la recta r.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.- Sea $f:\Re \to \Re$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x<0 \\ 1-mx-x^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

a) Determina m sabiendo que f es derivable. Cada trozo es continuo y derivable (el primer trozo no lo sería en 1, pero no está en ese intervalo). Veamos qué pasa en x = 0

$$\text{Continuidad: } \left.\begin{array}{l} f(0)=1-0-0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-mx-x^2)=1 \end{array}\right\} \text{Continua en } x=0$$

Derivabilidad:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{1-h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1-1+h}{h(1-h)}=1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1-mh-h^2-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h(-m-h)}{h}=-m \end{array}\right\} m=-1$$

Para que sea derivable tiene que ser m = -1

b) Calcula

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-x}dx+\int_{0}^{1}(1+x-x^2)dx=-\ln|1-x|\Big]_{-1}^{0}+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{1}=$$

$$=-\ln 1+\ln 2+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-0=\ln 2+\frac{7}{6}$$

2.- Sean $f:\Re \to \Re$ y $g:\Re \to \Re$ las funciones definidas por $f(x)=x^2+ax+b$ y $g(x)=c\,e^{-(x+1)}$

Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto (-1,2) y tienen en ese punto la misma recta tangente.

a) Calcula los valores de a, b y c. $f'(x)=2x+a$; $g'(x)=-ce^{-(x+1)}$

Sabemos que: $f(-1)=2$ y $g(-1)=2$ y también que $f'(-1)=g'(-1)$. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} 1-a+b=2 \\ ce^0=2 \\ -2+a=-c\,e^0 \end{array}\right\} \Rightarrow c=2 \Rightarrow -2+a=-2 \Rightarrow a=0 \Rightarrow 1-0+b=2 \Rightarrow b=1$$

b) Halla la ecuación de dicha recta tangente: $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$

$y-2=-2(x+1) \Rightarrow y=-2x$ es la recta tangente pedida.

3.- Considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ x+\lambda y+z=8 \\ \lambda x+y+\lambda z=10 \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores de λ.

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 8 \\ \lambda & 1 & \lambda & 10 \end{pmatrix}$ estudiamos el rango de ambas matrices:

$r(A)<3$ para cualquier valor de λ, ya que las columnas 1ª y 3ª son iguales, nos queda: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-1 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1 \end{array}\right.$

Para $\lambda \neq -1 \rightarrow r(A)=2$, veamos el rango de A*, por lo menos 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 8 \\ \lambda & 1 & \lambda & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 8 \\ 1 & \lambda & 10 \end{vmatrix} = -10+8+2\lambda^2-2+8\lambda-10\lambda=0$$

$$2\lambda^2-2\lambda-4=0 \rightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=\left\langle \begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array}\right.$$

Discusión del sistema:

- Para $\lambda=-1 \rightarrow r(A)=1, r(A^*)=2$, INCOMPATIBLE
- Para $\lambda=2 \rightarrow r(A)=2, r(A^*)=2$, COMPATIBLE INDETERMINADO
- Para $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \rightarrow r(A)=2, r(A^*)=3$ INCOMPATIBLE

b) Resuelve el sistema para $\lambda=2$.

$\left.\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ x+2y+z=8 \\ 2x+y+2z=10 \end{array}\right\}$ Sistema Compatible Indeterminado, con $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, z = t

$\left.\begin{array}{l} x-y=2-t \\ x+2y=8-t \end{array}\right\} \rightarrow 3y=6 \rightarrow y=2 \Rightarrow x=4-t$ Solución: $\begin{cases} x=4-t \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$

4.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,1,-1), es paralela al plano de ecuación $x-y+z=1$ y corta al eje Z.

La recta pedida estará contenida en el plano que contiene el punto A y el eje OZ, vamos a hallar dicho plano: punto A(1,1,-1), $\vec{d}(0,0,1)$, $\vec{e}=\overrightarrow{OA}=(1,1,-1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to y-1-x+1=0 \Rightarrow x-y=0$$

Vector de dirección de la recta pedida será perpendicular al vector normal de este plano ($\vec{n}(1,-1,0)$), ya que está contenida en él y también perpendicular al vector normal del plano que nos dan ($\vec{n}'(1,-1,1)$), ya que es paralela a él.

Luego el vector de dirección buscado será: $\vec{d} = (1,-1,0)\times(1,-1,1) = (-1,-1,0)$

Recta pedida: pasa por A(1,1,-1) y tiene vector de dirección $(-1,-1,0)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

OPCIÓN B

1.- Sea $f:\Re \to \Re$ la función dada por $f(x) = \left|8-x^2\right|$

a) Esboza la gráfica y halla los extremos relativos de f.

$$8-x^2=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \to f(x) = \left|8-x^2\right| = \begin{cases} x^2-8 & \text{si } x < -2\sqrt{2} \\ 8-x^2 & \text{si } -2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2} \\ x^2-8 & \text{si } x > 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2\sqrt{2} \\ -2x & \text{si } -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2} \\ 2x & \text{si } x > 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \to -2x = 0 \to x = 0$

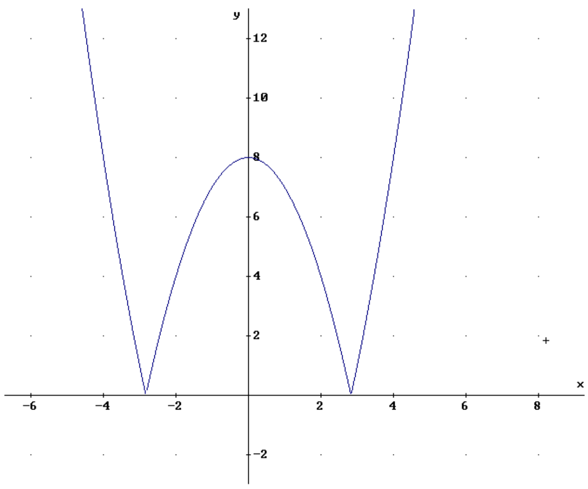
Los posibles extremos relativos están en 0 y en los puntos angulosos, es decir en $-2\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$

$f'(x) < 0$ si $x < -2\sqrt{2}$

$f'(x) > 0$ si $-2\sqrt{2} < x < 0$

$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2\sqrt{2}$

$f'(x) > 0$ si $x > 2\sqrt{2} \to$ Máximo $(0,8)$, Mínimos $\left(-2\sqrt{2},0\right)\left(2\sqrt{2},0\right)$



b) $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^{2\sqrt{2}}(8-x^2)dx + \int_{2\sqrt{2}}^4 (x^2-8)dx = \left. 8x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{8}} + \left. \frac{x^3}{3} - 8x \right]_{\sqrt{8}}^4 =$

$$= 8\sqrt{8} - \frac{8\sqrt{8}}{3} - 0 + \frac{64}{3} - 32 - \frac{8\sqrt{8}}{3} + 8\sqrt{8} = 16\sqrt{8} - \frac{16\sqrt{8}}{3} - \frac{32}{3} = \frac{64\sqrt{2}-32}{3}$$

2.- Sea $f:\Re\to\Re$ la función definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x<0\\ x^2-3x-1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad.

Primer trozo, continua y derivable en $\Re-\{1\}$, o sea lo es en el intervalo $(-\infty,0)$

Segundo trozo, polinómica, continua y derivable en el intervalo $(0,\infty)$

Veamos que pasa en el punto x = 0:

Continuidad: $\left.\begin{array}{l} f(0)=0-0-1=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-3x-1)=-1\end{array}\right\}$ Continua en x=0

Derivabilidad:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{h-1}+1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1+h-1}{h(h-1)}=-1\\ f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-3h-1+1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h(h-3)}{h}=-3\end{array}\right\}\text{NO}$$

La función no es derivable en x = 0

b) Determina sus asíntotas.

El segundo trozo es una función polinómica, no tiene asíntotas, pero el primer trozo es una racional, veamos las asíntotas:

Verticales: en x = 1, pero no está en el intervalo, luego no tiene

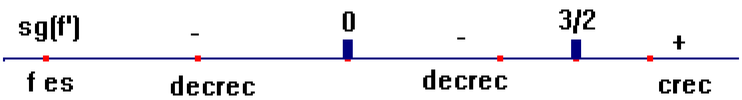
Horizontal: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ eje x por al izquierda $\to y=0^+$

c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su mínimo relativo.

Hallamos primero el mínimo:

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x<0\\ 2x-3 & \text{si } x\geq 0\end{cases}\to\begin{cases}-\dfrac{1}{(x-1)^2}=0,\ \text{no}\\ 2x-3=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Tenemos que tener en cuenta también el punto anguloso (x = 0):



Mínimo $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{13}{4}\right)$

Recta tangente en ese punto: $y+\dfrac{13}{4}=f'\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\to y=-\dfrac{13}{4}$

Lógicamente, recta horizontal

3.- Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ m-4 & 1 & 1-m\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$

a) Halla el valor de m para el que la matriz A no tiene inversa.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ m-4 & 1 & 1-m\end{vmatrix}=1-m+m-4-1-2+2m=2m-6=0\Rightarrow m=3$$

Existe la inversa cuando $m\neq 3$

b) Resuelve el sistema $AX=B$ para m = 2.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$$

Hallemos A^{-1}: $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2\rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\rightarrow AX=B\rightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

4.- Dada la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=z-2\rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=2+\lambda\end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto A(1,2,3).

$\vec{n}(\text{plano})=\vec{d}(\text{recta})=(2,-1,1)\rightarrow 2x-y+z+D=0$

pasa por $A\rightarrow 2-2+3+D=0\Rightarrow D=-3\Rightarrow\pi\equiv 2x-y+z-3=0$

b) Determina las coordenadas del punto B, simétrico de A respecto de la recta r.

Hallamos la intersección de r con el plano perpendicular calculado en el apartado A, se cortan en el punto P, que es el punto medio del segmento AA' (A' simétrico de A)

$2(1+2\lambda)-(1-\lambda)+2+\lambda-3=0\Rightarrow 2+4\lambda-1+\lambda+2+\lambda-3=0\Rightarrow\lambda=0$

$P(1,1,2)\rightarrow(1,1,2)=\left(\frac{1+x}{2},\frac{2+y}{2},\frac{3+z}{2}\right)\rightarrow A'(1,0,1)$