CONTROL GEOMETRÍA- SISTEMAS

1. Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases}$ y la recta *s* definida por $\begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*. (1 p)

b) Halla la ecuación general de un plano que contiene a *s* y es paralelo a *r*.(1,5p)

2. Se sabe que los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x + 2y + bz = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y + bz = 0$ y $\pi_3 \equiv 3x + 3y - 2z = 1$ se cortan en una recta *r*.

   a) Calcula el valor de b. (1,25 p)

   b) Halla las ecuaciones paramétricas de *r*. (1,25 p)

3. Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta *r* de ecuación $x = y = z$, es paralela al plano $\pi \equiv 3x + 2y - z = 4$ y pasa por el punto $A(1,2,-1)$. (2,5 p)

4. Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = mx \\ x + 2y + z = my \\ x + 2y + 4z = mz \end{array}\right\}$$ (1 p)

   Resuelve el sistema anterior para el caso m = 0 y para el caso m = 1. (1,5 p)

SOLUCIÓN

1. Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ 3y+z=3 \end{cases}$ y la recta *s* definida por $\begin{cases} 2x-z=3 \\ y=0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*.

$$r \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=3-3y \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=3-3\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} z=3+2x \\ y=0 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=0 \\ z=-3+2\mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu=0 \\ 0=\lambda \\ -3+2\mu=3-3\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu=0 \\ \lambda=0 \\ 2\mu+3\lambda=6 \end{array}\right\} \text{Incompatible} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \vec{d}_r=(0,1,-3) \\ \vec{d}_s=(1,0,2) \end{cases} \quad \text{distinta}$$

dirección, luego las rectas se cruzan.

b) Halla la ecuación general de un plano que contiene a *s* y es paralelo a *r*.

Contiene a $s \rightarrow \begin{cases} P(0,0,-3) \\ \vec{d}_s(1,0,2) \end{cases}$ y al ser paralela a $r \rightarrow \vec{d}_r=(0,1,-3)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z+3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z+3-2x+3y=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x-3y-z-3=0$$

2. Se sabe que los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x+2y+bz=1$, $\pi_2 \equiv 2x+y+bz=0$ y $\pi_3 \equiv 3x+3y-2z=1$ se cortan en una recta *r*.

a) Calcula el valor de b.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+bz=1 \\ 2x+y+bz=0 \\ 3x+3y-2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & b & 1 \\ 2 & 1 & b & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que se corten en una recta el sistema formado por los tres planos tiene que ser compatible indeterminado. Es decir r(A)=r(A*)<3$\Rightarrow |A|=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2+6b+6b-3b-3b+8=0 \Rightarrow 6b+6=0 \Rightarrow b=-1$$

Para b= -1 r(A)=2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, veamos el rango de A*:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ r(A*)=2 , es decir para b = -1 los tres planos se cortan en una recta.

b) Halla las ecuaciones paramétricas de *r*.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x+3y-2z=1 \end{array}\right\} \text{con } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0\text{, hacemos } z=\lambda \text{ y tenemos el sistema:}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=1+\lambda \\ 2x+y=\lambda \end{array}\right\} \text{lo resolvemos por Cramer: } x = \frac{\begin{vmatrix} 1+\lambda & 2 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1-\lambda}{-3};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2-\lambda}{-3} \qquad \text{La recta pedida será: } r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

3. Halla las ecuaciones paramétricas de una recta sabiendo que corta a la recta *r* de ecuación $x=y=z$, es paralela al plano $\pi \equiv 3x+2y-z=4$ y pasa por el punto $A(1,2,-1)$.

Empezamos hallando la ecuación del plano que pasa por A y es paralelo al plano dado, este plano tiene que cortar a la recta dada en un punto B, la recta pedida tiene que estar contenida en este nuevo plano, será la recta que pasa por A y B

Plano paralelo al dado, tendrá la forma: $\pi_1 \equiv 3x+2y-z+D=0$, como pasa por el punto A: $3\cdot 1+2\cdot 2-(-1)+D=0 \to 3+4+1+D=0 \Rightarrow D=-8$

Luego el plano buscado es $\pi_1 \equiv 3x+2y-z-8=0$

Hallaremos la intersección de este plano con la recta dada, primero la ponemos en paramétricas: $x=y=z \to \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \to$ (sustituimos) $3\lambda+2\lambda-\lambda-8=0 \Rightarrow \lambda=2$

Punto B(2,2,2) y el otro punto de la recta pedida es $A(1,2,-1) \to \vec{d} = \overrightarrow{AB}(1,0,3)$

Ecuaciones paramétricas de la recta pedida: $r' \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=2 \\ z=-1+3\mu \end{cases}$

4. Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=mx \\ x+2y+z=my \\ x+2y+4z=mz \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} (2-m)x+y+z=0 \\ x+(2-m)y+z=0 \\ x+2y+(4-m)z=0 \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{pmatrix}$$

Sistema homogéneo, siempre es compatible ya que siempre r(A)=r(A*)

Veamos el rango de ambas:

$$\begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix} = -m^3 + 8m^2 - 16m + 9 = 0$$

Factorizamos y tenemos: $(m-1)(-m^2+7m-9)=0 \left\langle \begin{array}{l} m-1=0 \\ -m^2+7m-9=0 \end{array} \right.$

$$\left\langle \begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-36}}{-2}=\dfrac{7}{2}\pm\dfrac{\sqrt{13}}{2} \end{array} \right.$$

Para $m=1$ o $m=\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2} \rightarrow r(A)=2=r(A^*)$ Sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones, es decir, tiene más de una solución para estos valores de m.

Para $m\neq 1$ y $m\neq \frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2} \rightarrow r(A)=3=r(A^*)$ Sistema compatible determinado, solución única, que es la solución trivial (0,0,0)

b) Resuelve el sistema anterior para el caso m = 0 y para el caso m = 1.
Para m = 0 el sistema sólo tiene la solución trivial como hemos visto antes, es decir que la solución es x = 0, y = 0, z = 0
Para m = 1

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right\} A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ hacemos } x = s$$

$$\left.\begin{array}{l} y+z=-\lambda \\ 2y+3z=-\lambda \end{array}\right\} \text{lo resolvemos por Cramer: } y=\frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\lambda & 3 \end{vmatrix}}{1}=-2\lambda\,;\; z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}}{1}=\lambda$$

Solución: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$