GLOBAL GEOMETRÍA 2

1.- Considera el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 2 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$

a) Halla la posición relativa de r y π, según los valores del parámetro m.
b) Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
c) Para $m = -3$, halla el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

(2 puntos)

2.- Sabiendo que las rectas $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$ se cruzan.

a) Halla los puntos A (de r) y B (de s) que están a la mínima distancia.
b) Halla la distancia entre r y s. (2 puntos)

3.- Sea la recta r de ecuación $x - 1 = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$ y el plano $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$.
Calcula el área del triángulo de vértices ABC, siendo A el punto de corte de la recta r y el plano π, B el punto (2,1,2) de la recta r y C la proyección ortogonal del punto B sobre el plano π. (2,5 puntos)

4.- Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano $\pi \equiv 2x - 3y - z + 5 = 0$ (1,5 puntos)

5.- Sea r la recta dada por $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$

Determina razonadamente:

a) Un plano perpendicular a ella
b) Un plano paralelo a ella
c) Una recta paralela a ella
d) Una recta perpendicular a ella (2 puntos)

SOLUCIONES

1.- a) $r \equiv \dfrac{x-5}{-2} = y = \dfrac{z-6}{m} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 5 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 6 + m\lambda \end{cases}$ para ver la posición relativa,

sustituimos: $2(5-2\lambda)+\lambda-(6+m\lambda)+2=0 \Rightarrow 10-4\lambda+\lambda-6-m\lambda+2=0$

$-4\lambda+\lambda-m\lambda=-10+6-2 \Rightarrow (-3-m)\lambda=-6$

Luego, si $m=-3 \Rightarrow$ no tiene solución, es decir la recta y el plano serían paralelos

Y si $m \neq -3 \Rightarrow$ la recta y el plano se cortan en un punto.

b) Para $m=-3 \Rightarrow$ plano π' que contiene a r y es perpendicular a π

contiene a r, entonces pasa por un punto cualquiera de la recta y tiene su vector de dirección $\rightarrow P(5,0,6) \quad \vec{d}(-2,1,-3)$

perpendicular a π, entonces su vector normal me sirve como dirección de π':

$\vec{e}=\vec{n}(2,1,-1)$, por lo que el plano pedido, será:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} -2 & 2 & x-5 \\ 1 & 1 & y \\ -3 & -1 & z-6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x-8-4z+14=0 \rightarrow \pi' \equiv x-4y-2z+7=0$$

c) Para $m=-3 \Rightarrow$ plano π' que contiene a r y es paralelo a π

contiene a r, entonces pasa por P(5,0,6) y paralelo a π, tiene el mismo vector normal, es decir que $\pi' \equiv 2x+y-z+d=0$ y como pasa por P, tiene que verificar la ecuación, es decir $10+0-6+d=0 \Rightarrow d=-4 \Rightarrow \pi' \equiv 2x+y-z-4=0$

2.- $r \equiv x=y=z$ y $s \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=3+\mu \\ z=-\mu \end{cases}$ sabemos que las rectas se cruzan.

a) Para hallar los puntos A y B, tomamos primero los puntos genéricos de r y s y sabemos que la dirección AB tiene que ser perpendicular a r y también a s, es decir que los productos escalares de $\overrightarrow{AB}$ por $\vec{d}$ (vector dirección de r) y por $\vec{e}$ (vector dirección de s) tienen que ser 0.

$r \equiv x=y=z \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow$ punto genérico $A(\lambda,\lambda,\lambda)$

$s \equiv \begin{cases} x=1+\mu \\ y=3+\mu \\ z=-\mu \end{cases} \rightarrow$ punto genérico $B(1+\mu,3+\mu,-\mu) \rightarrow \overrightarrow{AB}(1+\mu-\lambda,3+\mu-\lambda,-\mu-\lambda)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{d}=0 \rightarrow 1+\mu-\lambda+3+\mu-\lambda-\mu-\lambda=0 \Rightarrow \mu-3\lambda=-4$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{e}=0 \rightarrow 1+\mu-\lambda+3+\mu-\lambda-(-\mu-\lambda)=0 \Rightarrow 3\mu-\lambda=-4$ resolviendo el sistema,

tenemos que $\mu=-1$ y $\lambda=1 \Rightarrow A(1,1,1)$ y $B(0,2,1)$ son los puntos pedidos.

b) Para hallar la distancia entre las rectas: $d(r,s)=d(A,B)$

$d(A,B)=\sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{2}$ u.l.

3.- Para hallar el punto A necesitamos poner la recta en paramétricas, para hallar su intersección con el plano: $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+3t \\ z = 3-t \end{cases}$ sustituimos en $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$

$$(1+t)-(-2+3t)+(3-t)+1=0 \Rightarrow 1+t+2-3t+3-t+1=0 \Rightarrow -3t=-7 \rightarrow t=\frac{7}{3}$$

$$A\begin{cases} x = 1+\frac{7}{3} = \frac{10}{3} \\ y = -2+3t = -2+7 = 5 \rightarrow A\left(\frac{10}{3},5,\frac{2}{3}\right) \\ z = 3-t = 3-\frac{7}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Para hallar C (proyección ortogonal de B (2,1,2) sobre el plano), hallamos la recta perpendicular al plano y que pasa por B (tendrá vector de dirección el vector normal del plano) y luego su intersección con el plano nos dará el punto C

$\pi \equiv x - y + z + 1 = 0 \rightarrow \vec{n}(1,-1,1) \rightarrow \vec{d}(1,-1,1) \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$, sustituimos en el plano

y tenemos $(2+\lambda)-(1-\lambda)+(2+\lambda)+1=0 \Rightarrow 2+\lambda-1+\lambda+2+\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{4}{3}$

sustituyendo, tendremos el punto $C\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)$, para hallar el área del triángulo

ABC$\rightarrow Area = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{32}{9}\right)^2+\left(-\frac{64}{9}\right)^2+\left(-\frac{32}{9}\right)^2}}{2} = \sqrt{\dfrac{512}{27}} = 4{,}35$ u.a.

$$\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{4}{3},-4,\frac{4}{3}\right)x\left(-\frac{8}{3},-\frac{8}{3},0\right) = \left(\frac{32}{9},-\frac{64}{9},-\frac{32}{9}\right)$$

4.- $\pi \equiv 2x - 3y - z + 5 = 0$, tenemos que hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas (OX, OY y OZ) con este plano:

$$OX\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \rightarrow A \rightarrow 2\lambda+5=0 \rightarrow \lambda=-\frac{5}{2} \rightarrow A\left(-\frac{5}{2},0,0\right) \\ z = 0 \end{cases}$$

análogamente, obtenemos los otros dos puntos: $B\left(0,\frac{5}{3},0\right)$ y $C(0,0,5)$

El volumen del tetraedro será: $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{125}{36}$ u.v.

5.- $\begin{cases} x-y=2 \\ 2y+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases} \rightarrow P(2,0,1), \quad \vec{d}(1,1,-2)$

a) Un plano perpendicular a ella

Vector normal $\vec{n}=\vec{d}=(1,1,-2) \rightarrow x+y-2z+d=0$ uno de ellos: $x+y-2z=0$

b) Un plano paralelo a ella

Su vector normal tiene que ser perpendicular a $\vec{d}(1,1,-2)$, por ejemplo $\vec{n}(1,-1,0)$, luego un plano paralelo sería, por ejemplo el plano: $x-y=0$

c) Una recta paralela a ella

Mismo vector de dirección, si, por ejemplo, tomamos como punto el origen de coordenadas (la recta dada no pasa por él), una recta paralela sería:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases}$$

d) Una recta perpendicular a ella, tendría como vector de dirección uno perpendicular (por ejemplo el del apartado b): $(1,-1,0)$ y tomamos un punto de r (por ejemplo el $P(2,0,1)$), para que sean perpendiculares (no se crucen, sino que se corten), luego una recta perpendicular puede ser:

$$\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1 \end{cases}$$