MATEMÁTICAS II

GLOBAL ANÁLISIS Diciembre 2009

ALUMNA/O:

1. Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

 a) Determina $a, b \in R$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2,2) y tiene un punto de inflexión de abscisa x = 0. (1,5 puntos)

 b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión. (1 punto)

2. Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = x|x-2|$

 a) Estudia la derivabilidad de f en x = 2. (1 punto)

 b) Esboza la gráfica de f. (0,5 puntos)

 c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas. (1 punto)

3. Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = (x+2)e^{-x}$

 a) Halla las asíntotas de la gráfica de f. (1 punto)

 b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)

 c) Con los datos anteriores esboza la gráfica de f. (0,5 puntos)

4. Se divide un segmento de longitud L = 20cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado sea mínima. (2,5 puntos)

SOLUCIONES

1. Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

a) Determina $a, b \in R$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2,2) y tiene un punto de inflexión de abscisa x = 0.

Sabemos, por tanto, que $f(2) = 2, f''(0) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \to f''(x) = 6x + 2a$

$f(2) = 8 + 4a + 2b + 1 = 2 \to 8 + 2b + 1 = 2 \to b = -\dfrac{7}{2}$ $f(x) = x^3 - \dfrac{7}{2}x + 1$

$f''(0) = 2a = 0 \Rightarrow a = 0$

b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión. $f(0) = 1 \to P.I.(0,1)$, $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{7}{2} \to f'(0) = -\dfrac{7}{2}$

Recta tangente: $y - 1 = -\dfrac{7}{2}(x - 0) \to y = -\dfrac{7}{2}x + 1$

Recta normal: $y - 1 = \dfrac{2}{7}(x - 0) \to y = \dfrac{2}{7}x + 1$

2. Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = x|x - 2|$

$$f(x) = \begin{cases} x(-x+2) & si\ x < 2 \\ x(x-2) & si\ x \geq 2 \end{cases} \to f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & si\ x < 2 \\ x^2 - 2x & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

a) Estudia la derivabilidad de f en x = 2. (Es continua en x =2)

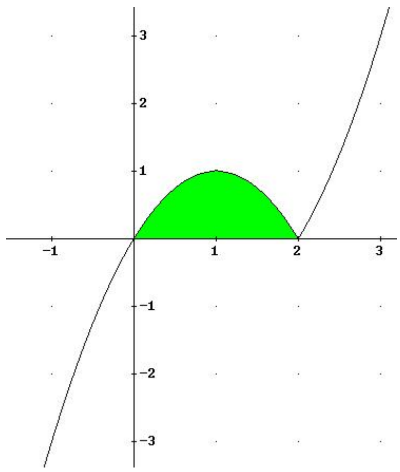
$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(2+h)^2 + 2(2+h) - 0}{h}$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) - 0}{h}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{-4 - 4h - h^2 + 4 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0}(-h-2) = -2 \\ f'(2^+) = \displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{4 + 4h + h^2 - 4 - 2h}{h} = \lim_{h \to 0}(h+2) = 2 \end{array}\right\} \text{NO Derivable en } x = 2$$

b) Esboza la gráfica de f.

Dos parábolas de vértices (1,1) la primera y (1,-1) la segunda, corte eje OX: 0 y 2



c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

$$A = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 - 0 = \frac{4}{3}u^2$$

3. Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = (x+2)e^{-x}$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

Dominio R. No tiene asíntotas verticales

Horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)e^{-x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x} = (\infty \cdot 0) \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^{-x} = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = L'H = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

Asíntota horizontal y = 0 por la derecha, por la izquierda tiene una rama parabólica hacia abajo.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$f'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = -(x+1)e^{-x} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

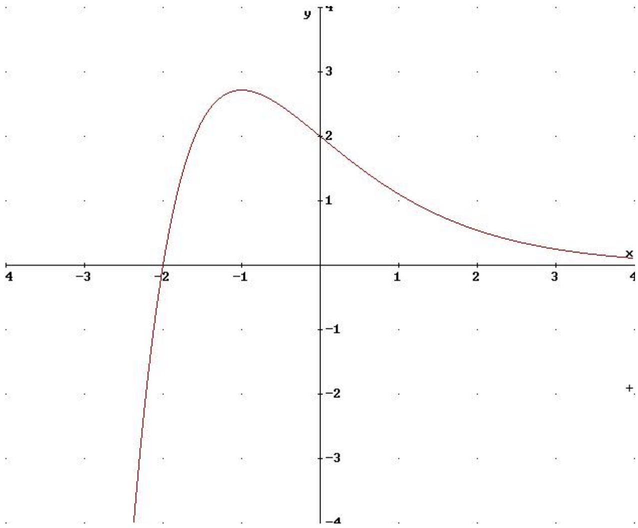
Si $x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

Si $x > -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en $(-1, +\infty)$

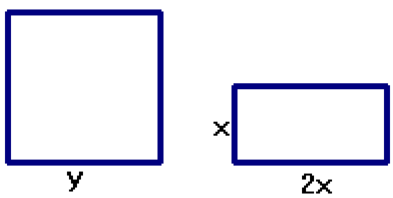
c) Con los datos anteriores esboza la gráfica de f.

Tiene un máximo en $(-1, e)$

Corte ejes: para y = 0 x = -2; para x = 0 y = 2



4. Se divide un segmento de longitud L = 20cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado sea mínima.



$$20 = 4y + 2x + 4x \to 10 = 2y + 3x \to y = \frac{10-3x}{2}$$

$A = y^2 + 2x^2 = \left(\frac{10-3x}{2}\right)^2 + 2x^2 = \frac{17x^2 - 60x + 100}{2}$ esta es la función de la que tenemos que hallar el mínimo, derivamos:

$A' = \frac{34x - 60}{2} = 17x - 30 = 0 \Rightarrow x = \frac{30}{17}$

Comprobemos que es mínimo $\Rightarrow A'' = 17 > 0$, mínimo

Para $x = \frac{30}{17} \to y = \frac{10 - 3\frac{30}{17}}{2} = \frac{170-90}{34} = \frac{40}{17}$

Solución: Hay que construir un cuadrado de lado $\frac{40}{17}$cm $\left(\frac{160}{17}\text{cm este trozo}\right)$ y un rectángulo de dimensiones $\frac{30}{17}\text{cm} \times \frac{60}{17}\text{cm} \left(\frac{180}{17}\text{cm este trozo}\right)$