MATEMÁTICAS II

RECUPERACIÓN ANÁLISIS Abril 2010

1. Sea $f:R \to R$ la función definida por $f(x) = x + e^{-x}$

   a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, así como los extremos relativos o locales de f. (0,75 puntos)

   b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f. (0,75 ptos)

   c) Determina las asíntotas de la gráfica de f. (0,75 puntos)

   d) Esboza la gráfica de f. (0,75 puntos)

2. Se sabe que la función $f:[0,5] \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ -4 + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$ es derivable en el intervalo (0,5).

   a) Calcula las constantes a y b. (2 puntos)

   b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2. (0,75 puntos)

   c) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2. (0,75 puntos)

3. Calcula $\int x \operatorname{sen} x \, dx$ (1,5 puntos)

4. Sean las funciones $f, g: R \to R$ definidas por $f(x) = -x^2 + 1$, $g(x) = x - 1$.

a) Representa gráficamente ambas funciones. (0,75 puntos)

b) Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas. (1,25 puntos)

SOLUCIONES

1. Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = x + e^{-x}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, así como los extremos relativos o locales de f.

$f'(x) = 1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$

Sg (f')	-	0	+
f es	decreciente		creciente

Decreciente en $(-\infty, 0)$, creciente en $(0, +\infty)$ Mínimo en (0, 1)

b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f.

$f''(x) = e^{-x} \neq 0 \to e^{-x} > 0$ en todo R $\Rightarrow \cup$

c) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

No tiene asíntotas verticales, no existe $k / \lim_{x\to k} f(x) = \infty$

Horizontales $\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x + e^{-x}) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x + e^{-x}) = (-\infty + \infty) = +\infty \end{array}$ ramas parabólicas

Oblicuas:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{xe^{x}}) = 1$$

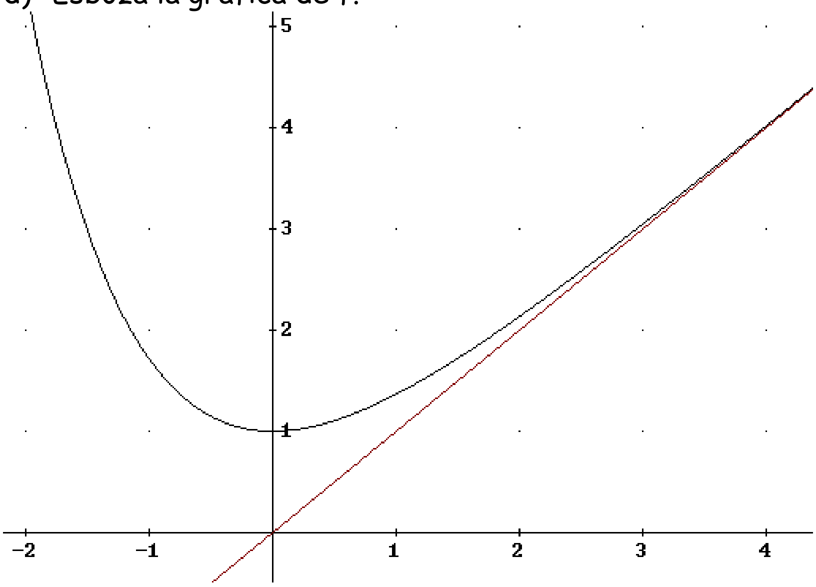
$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} (1 + \frac{e^{-x}}{x}) = 1 + \lim_{x\to-\infty} (\frac{e^{-x}}{x}) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\frac{e^{-x}}{x}) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

Asíntota oblicua y = x por la derecha solamente

d) Esboza la gráfica de f.



2. Se sabe que la función $f:[0,5]\to R$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ -4+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5 \end{cases}$$ es derivable en el intervalo (0,5).

a) Calcula las constantes a y b.

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2 \to \text{polinómica, continua y derivable en } (0,2) \\ -4+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5 \to \text{continua y derivable para } x>1, \text{ en } (2,5) \end{cases}$$

$$f(2)=-4+\sqrt{2-1}=-4+1=-3$$

Continua en 2: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax+bx^2)=2a+4b \quad \to 2a+4b=-3$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(-4+\sqrt{x-1})=-3$$

$$f'(2^-)=a+2bx=a+4b$$

Derivable en 2: $f'(2^+)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2} \qquad \to a+4b=\dfrac{1}{2}\to a=\dfrac{1}{2}-4b$

Resolvemos: $2\left(\dfrac{1}{2}-4b\right)+4b=-3 \Rightarrow 1-8b+4b=-3 \Rightarrow -4b=-4 \Rightarrow b=1$

$$a=\frac{1}{2}-4b=\frac{1}{2}-4=-\frac{7}{2}$$

b) $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

$$y+3=f'(2)(x-2)\to y+3=\frac{1}{2}(x-2)\to y=\frac{1}{2}x-4$$

c) $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

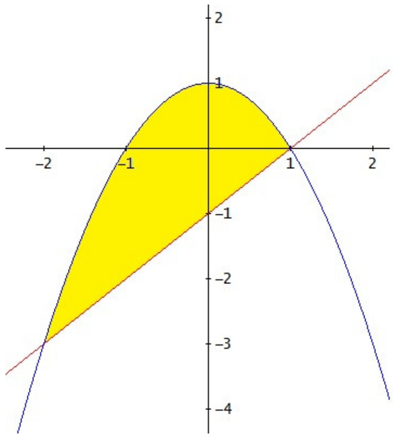
$$y+3=-\frac{1}{f'(2)}(x-2)\to y+3=-2(x-2)\to y=-2x+4$$

3. Calcula $\int x\,\text{sen}x\,dx$, la hacemos por partes:

$$\left.\begin{array}{ll} u=x & du=dx \\ dv=\text{sen}\,x\,dx & v=-\cos x \end{array}\right\} \int x\,\text{sen}x\,dx=-x\cos x+\int \cos x\,dx=-x\cos x+\text{sen}\,x+C$$

4. Sean las funciones $f, g : R \to R$ definidas por $f(x) = -x^2 + 1, \quad g(x) = x - 1$

Gráficas: recta y parábola.
Parábola de vértice V(0,1)
Corta eje OX en 1 y -1



Puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 1 \\ y = x - 1 \end{array}\right\} -x^2 + 1 = x - 1 \to -x^2 - x + 2 = 0 \to x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} -2 \\ 1 \end{array}\right.$$

b) Área: $A = \left| \int_{-2}^{1} \left(-x^2 + 1\right) - (x - 1) dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right) dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_{-2}^{1} \right| =$

$$= \left| -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{-8}{3} - \frac{4}{2} - 4 \right) \right| = \left| -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 \right| = \left| 8 - \frac{1}{2} - 3 \right| = \frac{9}{2} u^2$$