EXAMEN SEPTIEMBRE MATEMÁTICAS II – 2º BACHILLERATO –2011

1) Considera la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$.
(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.
(b) [1'75 puntos] Calcula el área de la región que está limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de f y por la recta tangente obtenida.

2) [2'5 puntos] Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = (x-1)e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, e^2)$

2b) [2'5 puntos] Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

3) Dadas las rectas r y r' de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \qquad r' \begin{cases} x - 4 = 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$$

a) [1,25 puntos] Estudia su posición relativa.
b) [1,25 puntos] Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el origen y corta a r y r'.

4) Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + \lambda y = \lambda \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z = 1 \\ \lambda x + y = 2 + \lambda \end{array}\right\}$$

a) [1,25 puntos] Clasifica el sistema según los valores de λ.
b) [1,25 puntos] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

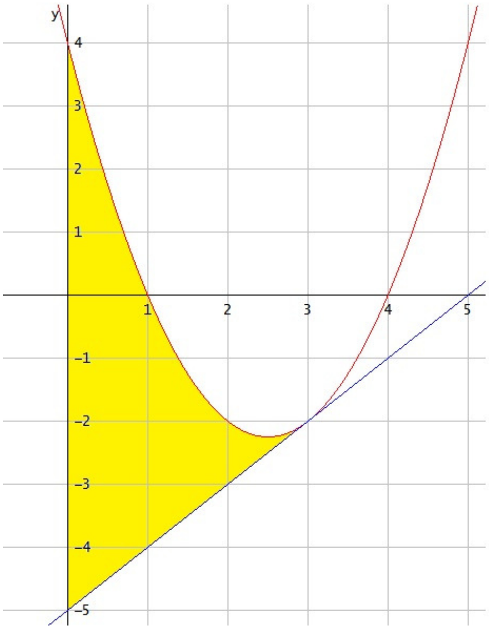
SOLUCIÓN

1) Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$. $f'(x) = 2x - 5 \to m = f'(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$, $f(3) = 9 - 15 + 4 = -2$

Recta tangente: $y - f(3) = f'(3)(x-3) \to y + 2 = 1(x-3) \to y = x - 5$

(b) [1'75 puntos] Calcula el área de la región que está limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de f y por la recta tangente obtenida. $A = A_1 + A_2$



$$A = \left| \int_0^3 (x-5) - (x^2 - 5x + 4) dx \right|$$

$$A = \left| \left. \frac{x^2}{2} - 5x - \frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x \right]_0^3 \right|$$

$$A = \left| \left. -\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 9x \right]_0^3 \right| = \left| -9 + \frac{54}{2} - 27 \right| = 9u^2$$

2) [2'5 puntos] Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = (x-1)e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, e^2)$

$$F(x) = \int (x-1)e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$\left. \begin{array}{l} u = (x-1) \\ dv = e^{2x}dx \end{array} \right\} \to \left. \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} \text{por partes}$$

Sabemos que $F(1) = e^2 \to F(1) = \frac{1}{2}(1-1)e^2 - \frac{1}{4}e^2 + C = e^2 \to -\frac{1}{4}e^2 - e^2 = -C \Rightarrow C = \frac{5}{4}e^2$

La primitiva pedida es, por tanto: $F(x) = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{5}{4}e^2$

2b) [2'5 puntos] Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Necesitamos primero hallar el punto de inflexión, derivamos dos veces:

$$f'(x) = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-xe^x}{e^{2x}} = -\frac{x}{e^x} \to f''(x) = \frac{-e^x + xe^x}{e^{2x}} = \frac{(x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{x-1}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{x-1}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 1 \to P.I.\left(1, \frac{2}{e}\right); \; f'(1) = -\frac{1}{e}$$

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \rightarrow y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$$

3) Dadas las rectas r y r' de ecuaciones:

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \qquad r' \begin{cases} x - 4 = 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$$

a) [1,25 puntos] Estudia su posición relativa. Las ponemos en paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \vec{d}(1,-3,1) \qquad r' \begin{cases} x = 4 + 5\mu \\ y = -3 + 4\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \vec{d}'(5,4,1)$$

No son paralelas ni coincidentes. Veamos si se cortan o se cruzan, resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -1 + \lambda = 4 + 5\mu \\ 2 - 3\lambda = -3 + 4\mu \\ \lambda = \mu \end{array}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -5 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

; r(A)=2; r(A*)=3 Se cruzan

b) [1,25 puntos] Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el origen y corta a r y r'.

Para hallar esta recta, vamos a hallar los planos P_1 que pasa por O y contiene a r_1 y P_2 que pasa por O y contiene a r_2. La recta pedida será la intersección de los dos planos.

$$P_1 \begin{cases} O(0,0,0) \\ P(-1,2,0) \\ \vec{d}(1,-3,1) \\ \vec{e} = \overrightarrow{OP}(-1,2,0) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -y - z - 3z - 2x = 0 \rightarrow 2x + y + 4z = 0$$

$$P_2 \begin{cases} O(0,0,0) \\ Q(4,-3,0) \\ \vec{d}(5,4,1) \\ \vec{e} = \overrightarrow{OQ}(4,-3,0) \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4y - 15z - 16z + 3x = 0 \rightarrow 3x + 4y - 31z = 0$$

Recta pedida $s: \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - 31z = 0 \end{cases}$ la pasamos a paramétricas: $z = \lambda$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = -4\lambda \\ 3x + 4y = 31\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -8x - 4y = 16\lambda \\ 3x + 4y = 31\lambda \end{array}\right\} \rightarrow -5x = 47\lambda \rightarrow x = -\frac{47}{5}\lambda; \; y = \frac{74}{5}\lambda$$

Solución $s: \begin{cases} x = -\frac{47}{5}\lambda \\ y = \frac{74}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

4) Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+\lambda y=\lambda \\ \lambda x+y+(\lambda-1)z=1 \\ \lambda x+y=2+\lambda \end{array}\right\} \to A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda-1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \to A^*=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 & 2+\lambda \end{pmatrix}$$

a) [1,5 puntos] Clasifica el sistema según los valores de λ.

Veamos los rangos de la matriz del sistema y la ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda-1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)-(\lambda-1)=0 \to (\lambda^2-1)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda=\pm 1$$

Para $\lambda=1 \to A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to r(A)=1, r(A^*)=2$

Sistema incompatible

Para $\lambda=-1 \to A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to r(A)=2, r(A^*)=2$

Sistema compatible indeterminado

Para $\lambda \neq \pm 1 \to r(A)=3, r(A^*)=3$ Sistema compatible determinado

b) [1,5 puntos] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Para $\lambda=-1 \to \left.\begin{array}{r} x-y=-1 \\ -x+y-2z=1 \\ -x+y=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x-y=-1 \\ -x+y-2z=1 \end{array}\right\} y=\lambda \to \left.\begin{array}{r} x=-1+\lambda \\ -x-2z=1-\lambda \end{array}\right\}$

Solución: $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$