EXAMEN SEPTIEMBRE 2011

Nombre:……..

PUNTUACIÓN: 1 punto cada ejercicio

1. Opera y simplifica:

a) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{675}-\sqrt{12}$ b) $\sqrt[6]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4-24x^2+144=0$

b) $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{10}{3}$

3. Representa gráficamente la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & x\le -3 \\ -2x-4 & -3<x\le 2 \\ \dfrac{3}{x-2} & x>2 \end{cases}$$

Halla su dominio y su recorrido. ¿Es continua?¿Por qué?

4. Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ x^2+y^2=65 \end{array}\right\}$$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_5\dfrac{1}{125}=x$ b) $\log_2\left(x^3-7\right)=0$

c) $\log_{36}x=\dfrac{1}{2}$ d) $\log_x 27=-3$

6. La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles es $6\sqrt{5}$ metros. Calcula el área y el perímetro del triángulo.

7. Dados los puntos A(-1,3), B(1,1) y C(-3,-2)

a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB.

b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C.

8. El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de 37º, ¿a qué altura vuela la cometa?

9. Dibuja un ángulo α en el segundo cuadrante, sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{5}$. Halla las restantes razones trigonométricas de α (Sin calculadora, usando las fórmulas trigonométricas y trabajando con fracciones, no con decimales)

10. Un estanque rectangular (6m x 4m), está rodeado por un camino uniforme de ancho x. Calcula x (el ancho del camino) sabiendo que la superficie del camino es igual que el área del estanque.

SOLUCIÓN

1. Opera y simplifica:

a) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{675}-\sqrt{12}=5\sqrt{3}-7\sqrt{3}+15\sqrt{3}-2\sqrt{3}=11\sqrt{3}$

b) $\sqrt[6]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}=\sqrt[6]{2\sqrt[6]{2^2\cdot 2}}=\sqrt[6]{2\sqrt[6]{2^3}}=\sqrt[12]{2^6\cdot 2^3}=\sqrt[12]{2^9}=\sqrt[4]{2^3}$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4-24x^2+144=0\rightarrow z=x^2\rightarrow z^2-24z+144=0$

$(z-12)^2=0\Rightarrow z-12=0\Rightarrow z=12\Rightarrow x=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{10}{3}\rightarrow \text{m.c.m.}=3(x-4)(x+4)$

$$\frac{3(x+4)^2}{3(x-4)(x+4)}+\frac{3(x-4)^2}{3(x-4)(x+4)}=\frac{10(x-4)(x+4)}{3(x-4)(x+4)}$$

$3x^2+24x+48+3x^2-24x+48=10x^2-160\rightarrow 4x^2-256=0$

$4x^2=256\rightarrow x^2=64\rightarrow x=\pm 8$

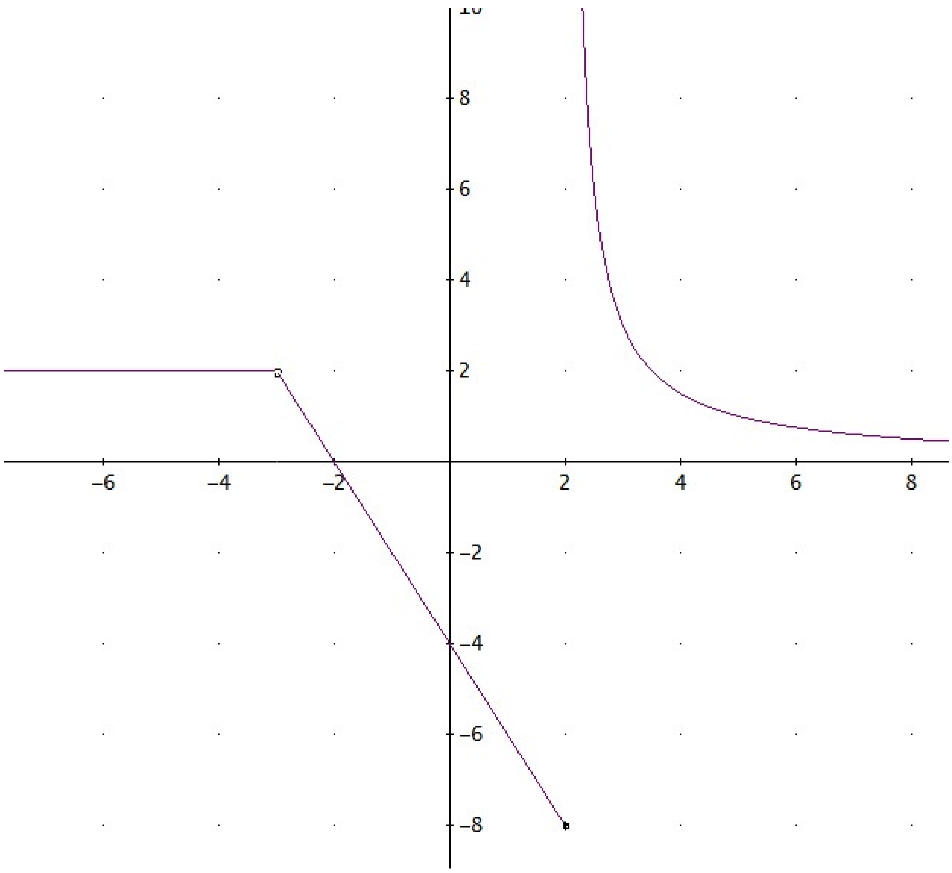
3. Representa gráficamente la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & x\le -3 \\ -2x-4 & -3<x\le 2 \\ \dfrac{3}{x-2} & x>2 \end{cases}$$ Halla su dominio y su recorrido. ¿Es continua?¿Por qué?

$D=\Re-\{-3,2\}$

$D=[-8,+\infty)$

No es continua, tiene una discontinuidad evitable en -3 y otra de salto infinito en 2. En el resto si es continua.



4. Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ x^2+y^2=65 \end{array}\right\} \rightarrow y=3-x \rightarrow x^2+(3-x)^2=65 \rightarrow x^2+9-6x+x^2=65$$

$$2x^2-6x-56=0 \rightarrow x^2-3x-28=0 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{3\pm 11}{2}=\left\langle\begin{array}{l}7\\-4\end{array}\right.$$

Para $x=7 \rightarrow y=3-x=3-7=-4$

Para $x=-4 \rightarrow y=3-x=3+4=7$

Solución: la recta y la parábola son secantes, se cortan en los puntos $(7,-4)$y$(-4,7)$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $log_5 \frac{1}{125}=x \rightarrow 5^x=\frac{1}{125}=\frac{1}{5^3}=5^{-3} \Rightarrow x=-3$

b) $log_2\left(x^3-7\right)=0 \rightarrow 2^0=x^3-7 \rightarrow 1=x^3-7 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$

c) $log_{36} x=\frac{1}{2} \rightarrow 36^{\frac{1}{2}}=x \rightarrow \sqrt{36}=x \Rightarrow x=6$

d) $log_x 27=-3 \rightarrow x^{-3}=27=3^3=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

6. La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles es $6\sqrt{5}$ metros. Calcula el área y el perímetro del triángulo.

Isósceles implica que los catetos son iguales, llamémosles x. Aplicamos el teorema de Pitágoras: $x^2+x^2=\left(6\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow 2x^2=36\cdot 5 \Rightarrow x^2=90 \rightarrow x=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ m

Área: $A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{x\cdot x}{2}=\frac{x^2}{2}=\frac{90}{2}=45m^2$

Perímetro: $P=x+x+6\sqrt{5}=3\sqrt{10}+3\sqrt{10}+6\sqrt{5}=6\sqrt{10}+6\sqrt{5}$ metros

7. Dados los puntos A(-1,3), B(1,1) y C(-3,-2)

a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB.

Pasa por el punto medio M, perpendicular a AB

$$M=\left(\frac{-1+1}{2},\frac{3+1}{2}\right)=(0,2),\ \overrightarrow{AB}=(2,-2) \rightarrow \text{perpendicular}(2,2) \rightarrow m=1$$

Ecuación de la mediatriz: $y = 1(x - 0) + 2 \Rightarrow y = x + 2$

b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C.

Paralela implica misma pendiente, pendiente de $AB \rightarrow m = -1$

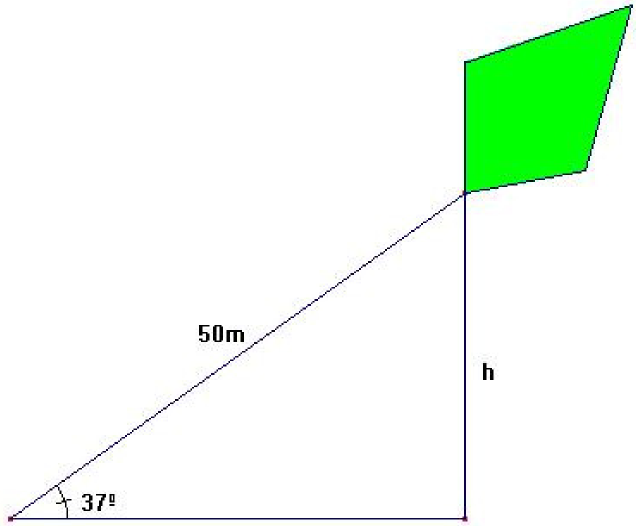
Ecuación pedida: $y = -1(x + 3) - 2 \Rightarrow y = -x - 5$

8. El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de 37º, ¿a qué altura vuela la cometa?

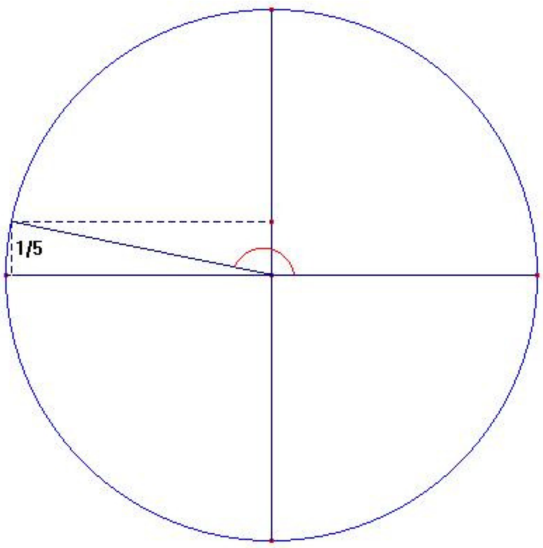
$$\text{sen } 37^{o} = \frac{h}{50}$$

$$50 \cdot \text{sen } 37^{o} = h$$

$$h = 30{,}09\,m$$



9. Dibuja un ángulo α en el segundo cuadrante, sabiendo que $\text{sen } \alpha = \frac{1}{5}$. Halla las restantes razones trigonométricas de α (Sin calculadora, usando las fórmulas trigonométricas y trabajando con fracciones, no con decimales)



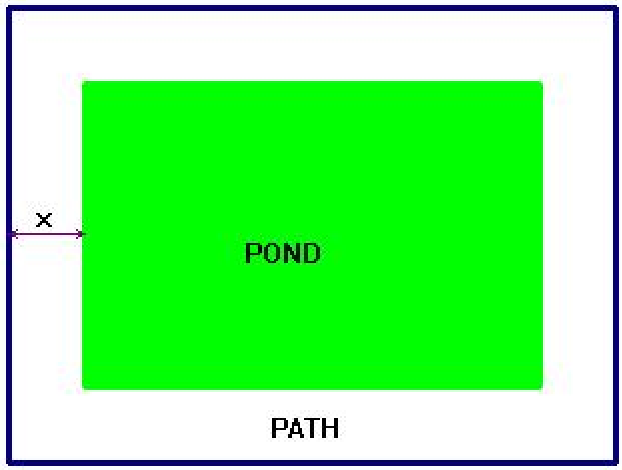
$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ (2º cuadrante)}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

10. Un estanque rectangular (6m x 4m), está rodeado por un camino uniforme de ancho x. Calcula x (el ancho del camino) sabiendo que la superficie del camino es igual que el área del estanque.



Área estanque:

$A = 6 \times 4 = 24m^2$

Luego el área del estanque más la del camino (rectángulo grande) será el doble, es decir $48m^2$

Área rectángulo grande:

$A = (6+2x) \times (4+2x) = 48$

Ecuación: $(6+2x) \times (4+2x) = 48 \to 24 + 8x + 12x + 4x^2 = 48$

$$4x^2 + 20x - 24 = 0 \to x^2 + 5x - 6 = 0 \to x = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -6 \end{matrix} \right.$$

Solución: el camino es de 1 metro de ancho