Universidades Públicas de Andalucía	**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA** **PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD** CURSO 2008-2009	**MATEMÁTICAS II**

Instrucciones:	a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos. b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma. d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula los valores de a, b, c y d sabiendo que f verifica:

- El punto (0,1) es un punto de inflexión de la gráfica de f.
- f tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x = 1$.
- La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 1.

Ejercicio 2.- Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$, $g(x) = 6 - x^2$.

(a) [**1 punto**] Esboza el recinto limitado por sus gráficas.

(b) [**1'5 puntos**] Calcula el área de dicho recinto.

Ejercicio 3.- Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos A, B y C.

- Pista 1: Si compramos una unidad de A, dos de B y una de C gastamos 118 euros.
- Pista 2: Si compramos n unidades de A, $n + 3$ de B y tres de C gastamos 390 euros.

(a) [**1'5 puntos**] ¿Hay algún valor de n para el que estas dos pistas sean incompatibles?

(b) [**1 punto**] Sabiendo que $n = 4$ y que el producto C cuesta el triple que el producto A, calcula el precio de cada producto.

Ejercicio 4.- Considera el punto $A(1, -2, 1)$ y la recta r definida por las ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ 2x + y + z & = & 7 \end{array} \right.$

(a) [**1 punto**] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A.

(b) [**1'5 puntos**] Calcula la distancia del punto A a la recta r.

Universidades Públicas de Andalucía	**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA** **PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD** CURSO 2008-2009	**MATEMÁTICAS II**

Instrucciones:	a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos. b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma. d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Se divide un segmento de longitud $L = 20$ cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Ejercicio 2.- La recta tangente a la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx^2 + nx - 3$, en el punto $(1, -6)$, es paralela a la recta de ecuación $y = -x$.

(a) [1'25 puntos] Determina las constantes m y n. Halla la ecuación de dicha recta tangente.

(b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas.

Ejercicio 3.- Sean A, B, C y X matrices cualesquiera que verifican $AXB = C$.

(a) [1 punto] Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el de C es 6, calcula el determinante de las matrices X y $2X$.

(b) [1'5 puntos] Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ calcula la matriz X.

Ejercicio 4.- [2'5 puntos] Considera la recta r definida por

$$\left\{ \begin{array}{rcr} y & = & -1 \\ 2x - z & = & 2 \end{array} \right.$$

y la recta s definida por

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 4 + 3\lambda \\ y & = & 3 - \lambda \\ z & = & 5 + 4\lambda \end{array} \right.$$

Halla la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

SOLUCIONES MODELO 1 2008-2009

OPCIÓN A

1. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

La recta tangente a la gráfica de f en x = 2 tiene pendiente $1 \Rightarrow f'(2) = 1$

f tiene mínimo local en x = $1 \Rightarrow f'(1) = 0$

Punto de inflexión en (0,1) $\Rightarrow f(0) = 1$ y $f''(0) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

$f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$

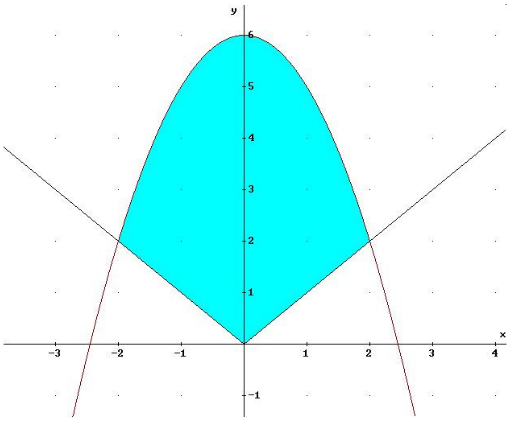
$f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \Rightarrow 3a + c = 0 \Rightarrow c = -3a$

$f'(2) = 1 \Rightarrow 12a + c = 1 \Rightarrow 12a - 3a = 1 \Rightarrow a = 1/9 \Rightarrow c = -3 \cdot 1/9 = -1/3$

2. $f(x) = |x|; \quad g(x) = 6 - x^2$

Funciones valor absoluto (con mínimo en (0,0)) y parábola con vértice en (0,6) y que corta al eje OX en $\pm\sqrt{6}$, la gráfica es $\rightarrow$



Para hallar el área (zona azul), necesitamos los puntos de corte de ambas gráficas:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

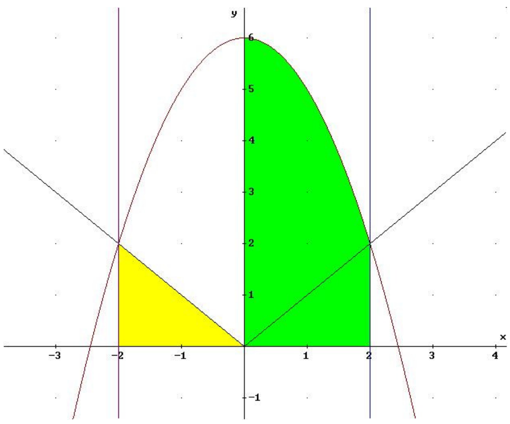
Resolveremos, por tanto, los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} y = -x \\ y = 6 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow -x = 6 - x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array}\right.$

la solución válida es la negativa (x<0) $x = -2$

b) $\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = 6 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 6 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array}\right.$

la solución válida es la positiva (x>0) $x = 2$



Para hallar el área pedida, hallaremos el área verde y le quitaremos la zona amarilla, el doble del resultado será nuestra área.

Área amarilla: triángulo de base 2 y altura 2

$$A = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2u^2$$

Área verde:

$$A = \int_0^2 (6 - x^2)dx = 6x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 =$$

$$= 12 - \frac{8}{3} - 0 = \frac{28}{3}u^2$$

Área azul: $A = 2\left[\frac{28}{3} - 2\right] = 2 \cdot \frac{22}{3} = \frac{44}{3}\, u^2$

3. A-x; B-y; C-z

$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 118 \\ nx + (n+3)y + 3z = 390 \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ n & n+3 & 3 \end{pmatrix};\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 118 \\ n & n+3 & 3 & 390 \end{pmatrix}$

a) Estudiamos el rango de A:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ n & n+3 \end{vmatrix} = n + 3 - 2n = 3 - n$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & 3 \end{vmatrix} = 3 - n$ los dos determinantes se anulan para n=3

Para n = 3, rango(A)=1 y rango(A')=2 incompatible

Para n = 3 las pistas son incompatibles.

b) El sistema será ahora: $\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 118 \\ 4x + 7y + 3z = 390 \\ z = 3x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 4x + 2y = 118 \\ 13x + 7y = 390 \end{array}\right\}$

$y = 59 - 2x \Rightarrow 13x + 7(59 - 2x) = 390 \Rightarrow 13x + 413 - 14x = 390 \Rightarrow x = 23$

$y = 59 - 2x = 59 - 46 = 13;\ z = 3x = 3 \cdot 23 = 69$

Precios de los productos: A-23, B-13, C-69

4. $A(1,-2,1)$, $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$

a) plano perpendicular a r que pasa por A: el vector de dirección de r será el normal del plano, hallémoslo $\vec{d} = (1,1,0) \times (2,1,1) = (0,1,0)$

Plano pedido: $0x + y + 0z + d = 0 \to y + d = 0$ pasa por $A \to -2 + d = 0 \Rightarrow d = 2$

Plano: $y + 2 = 0 \to y = -2$

b) Distancia de A a r, tenemos el plano perpendicular a r y que pasa por A:

$y + 2 = 0$, hallamos su intersección con $r \to P$

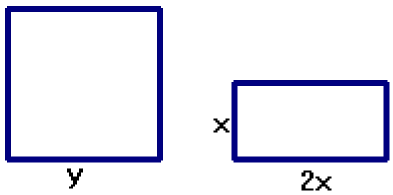
Resolvemos el sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ y + 2 = 0 \to y = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x - 2 = 2 \\ 2x - 2 + z = 7 \end{cases} \to \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 7 + 2 - 8 = 1 \end{cases}$

Punto de intersección P(4,2,1), A(1, -2, 1)

$$d(A,r) = d(A,P) = \sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25} = 5\ u$$

OPCIÓN B

1.



$20 = 4y + 2x + 4x \to 10 = 2y + 3x \to y = \dfrac{10-3x}{2}$

$A = y^2 + 2x^2 = \left(\dfrac{10-3x}{2}\right)^2 + 2x^2 = \dfrac{17x^2 - 60x + 100}{2}$ esta es la función de la que tenemos que hallar el mínimo, derivamos:

$A' = \dfrac{34x-60}{2} = 17x - 30 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{30}{17}$

Comprobemos que es mínimo $\Rightarrow A'' = 17 > 0$, mínimo

Para $x = \dfrac{30}{17} \to y = \dfrac{10 - 3\frac{30}{17}}{2} = \dfrac{170-90}{34} = \dfrac{40}{17}$

Solución: Hay que construir un cuadrado de lado $\dfrac{40}{17}$cm y un rectángulo de dimensiones $\dfrac{30}{17}\text{cm} \times \dfrac{60}{17}\text{cm}$

2. $f(x) = mx^2 + nx - 3$ recta tangente en el punto (1,-6) es $y = -x$

a) $f(1) = -6$ y $f'(1) = \text{pendiente} = -1$; $f'(x) = 2mx + n$

$f(1) = m + n - 3 = -6$ y $f'(1) = 2m + n = -1$, resolvemos el sistema:

$\left.\begin{array}{l} m+n=-3 \\ 2m+n=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 2; n = -5$, entonces $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

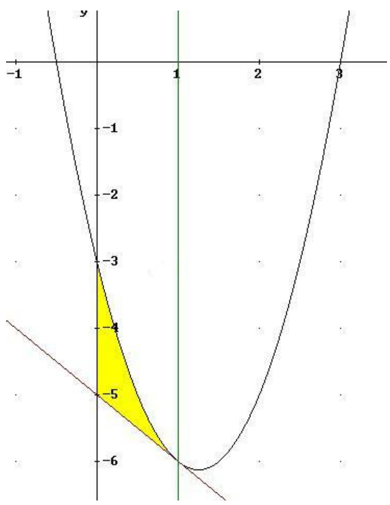
recta tangente en (1,-6): $y + 6 = -1(x-1) \Rightarrow y = -x - 5$

b) Área pedida (en amarillo)

$$A = \left| \int_0^1 (-x-5)dx - \int_0^1 (2x^2 - 5x - 3)dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^2}{2} - 5x \right]_0^1 - \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 3x \right]_0^1 \right| =$$

$$= \left| -\frac{1}{2} - 5 - \left[\frac{2}{3} - \frac{5}{2} - 3 \right] \right| = \left| -\frac{11}{2} + \frac{29}{6} \right| = \frac{2}{3}u^2$$



3. a) $AXB = C$,orden 3, $|A| = 3$; $|B| = -1$; $|C| = 6$

$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$; $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = -1$; $|X| = |A^{-1}CB^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |C| \cdot |B^{-1}| = \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot 6 = -2$

$|2X| = 2^3|X| = 8 \cdot (-2) = -16$

b) $X = A^{-1}CB^{-1}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

4. $r \equiv \begin{cases} y = -1 \\ 2x - z = 2 \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -2 + 2t \end{cases} \rightarrow P(0,-1,-2), \vec{d}(1,0,2)$

$s \equiv \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases} \rightarrow P'(4,3,5), \vec{d}(3,-1,4)$

Plano pedido: $\begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6y + 6 - z - 2 + 2x - 4y - 4 = 0$

Plano $2x - 2y - z = 0$