Universidades Públicas de Andalucía	UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD CURSO 2008-2009	MATEMÁTICAS II

Instrucciones:	a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos. b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma. d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Se considera la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

Determina la asíntota de la gráfica de f.

Ejercicio 2.- La curva $y = \dfrac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,1)$ y $D = (0,1)$ en dos recintos.

(a) [**0'75 puntos**] Dibuja dichos recintos.

(b) [**1'75 puntos**] Halla el área de cada uno de ellos.

Ejercicio 3.-

(a) [**1'75 puntos**] Discute según los valores del parámetro λ el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & \lambda y & & & = & 0 \\ x & & & + & \lambda z & = & \lambda \\ x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right\}$$

(b) [**0'75 puntos**] Resuélvelo para $\lambda = 0$.

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(1,0,0)$, la recta r definida por $x - 3 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$ y la recta s definida por $(x, y, z) = (1,1,0) + \lambda(-1,2,0)$.

(a) [**1'25 puntos**] Estudia la posición relativa de r y s.

(b) [**1'25 puntos**] Halla la ecuación del plano que pasando por P es paralelo a r y s.

Universidades Públicas de Andalucía	UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD CURSO 2008-2009	MATEMÁTICAS II

Instrucciones:	a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos. b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma. d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$$

Halla la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$. (Sugerencia: utiliza el cambio de variable $t = \frac{3}{2}x^2$).

Ejercicio 3.- [2'5 puntos] Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determina la matriz X que verifica $AX - B^t = 2C$ $\quad$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Ejercicio 4.- Considera la recta r definida por

$$\begin{cases} x - y + 3 & = 0 \\ x + y - z - 1 & = 0 \end{cases}$$

y la recta s definida por

$$\begin{cases} 2y + 1 & = 0 \\ x - 2z + 3 & = 0 \end{cases}$$

(a) [1'5 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

(b) [1 punto] ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s? Razona la respuesta.

Universidades Públicas de Andalucía	**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA** **PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD** CURSO 2008-2009	**MATEMÁTICAS II**

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CRITERIOS GENERALES. Los criterios esenciales de valoración de un ejercicio serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin la resolución efectiva no es suficiente para obtener una valoración completa del ejercicio. También se tendrá en cuenta lo siguiente:

- En los ejercicios en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
- Los estudiantes pueden utilizar calculadoras; no obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente razonados.
- Los errores cometidos en un apartado, por ejemplo en el cálculo del valor de un cierto parámetro, no se tendrán en cuenta en la calificación de los apartados posteriores que puedan verse afectados, siempre que resulten ser de una complejidad equivalente.
- Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10 % de la nota total del ejercicio.
- La presentación clara y ordenada del ejercicio se valorará positivamente.
- Si se realizan ejercicios de las dos opciones, sólo se evaluarán los ejercicios de la misma opción que el primero que aparezca físicamente en el papel de examen.

CRITERIOS ESPECÍFICOS PARA ESTE MODELO. La evaluación se realizará según el desglose de las puntuaciones que se hace a continuación. Si algún apartado no se menciona específicamente, su puntuación es la que figura en el enunciado del ejercicio correspondiente.

Cuando se dice: **"x puntos por A"**, hay que interpretar que se deben conceder x puntos si lo que se dice en la frase A está hecho o estudiado correctamente, incluyendo, si así se pide en el enunciado, la justificación oportuna.

Opción A

Ejercicio 1.- Hasta 1 punto por obtener la pendiente de la asíntota.

Ejercicio 2.- **(a)** Lo indicado en el enunciado.

(b) Hasta 1 punto por el cálculo de una de las áreas.

Ejercicio 3.- **(a)** Hasta 0'5 puntos por calcular los valores de λ. Hasta 0'25 puntos por el caso compatible determinado.

(b) Lo indicado en el enunciado.

Ejercicio 4.- **(a)** Lo indicado en el enunciado.

(b) Hasta 0'75 puntos por el planteamiento.

Opción B

Ejercicio 1.- Hasta 1'25 puntos por el planteamiento. Hasta 0'5 puntos por la justificación de mínimo.

Ejercicio 2.- Hasta 1 punto por efectuar el cambio. Hasta 0'5 puntos por el cálculo de la constante.

Ejercicio 3.- Si despeja la matriz X simbólicamente, hasta 1 punto. Si calcula A^{-1}, hasta 0'75 puntos.

Ejercicio 4.- **(a)** Hasta 0'75 puntos por el planteamiento.

(b) Lo indicado en el enunciado.

SOLUCIONES MODELO II 2008-2009

OPCIÓN A

1. Sea $f:[1,+\infty)\to R$ la función $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$

La única asíntota que tiene es oblicua, ya que no tiene ni horizontal ni vertical, vamos a calcularla:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}{1}=2$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}+x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}{1}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=$$

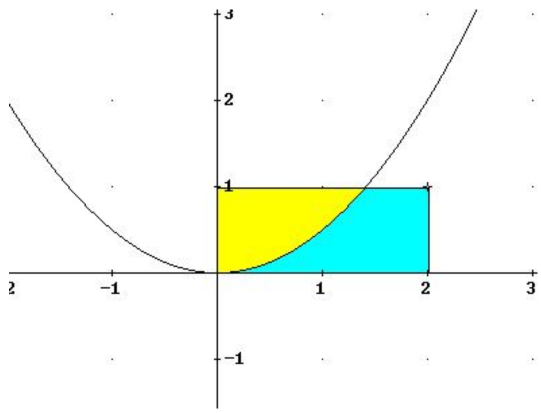
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-x-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}=-\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=+\infty$$

Asíntota oblicua: $y=2x-\frac{1}{2}$ (sólo por la derecha)

2. La curva $y=\frac{1}{2}x^2$ divide el rectángulo de vértices A(0,0), B(2,0), C(2,1), D(0,1) en dos recintos.

a) Dibújalos



b) Área de cada uno de ellos

Necesitamos el punto de corte de la recta y = 1 con la parábola $y=\frac{1}{2}x^2$

$1=\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$, el de nuestro recinto es $x=\sqrt{2}$

Empezamos calculando: $A=\int_0^{\sqrt{2}}1dx-\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{2}dx=x\Big]_0^{\sqrt{2}}-\frac{x^3}{6}\Big]_0^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Para calcular el área de la zona amarilla, al área del rectángulo de base $\sqrt{2}$ y altura 1 $\left(\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}\right)$ le restaremos el área A: A(amarilla)$=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}u^2$

Área azul: Será el área del rectángulo de base 2 y altura 1 $(2\times 1=2)$ menos el área amarilla, es decir A(azul) $=2-\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{6-\sqrt{2}}{3}u^2$

3. $\left.\begin{array}{l} 3x+\lambda y \quad =0 \\ x \quad +\lambda z=\lambda \\ x+y+3z=1 \end{array}\right\} A=\begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) $|A|=\begin{vmatrix} 3 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-6)=0 \Rightarrow \lambda=\left\langle \begin{array}{l} 0 \\ 6 \end{array}\right.$

Para $\lambda=0$ Sistema Compatible Indeterminado, ya que:

$A'=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dos filas proporcionales y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, r(A)=r(A')=2

Para $\lambda=6$ Sistema Incompatible, ya que:

$A'=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, r(A') = 3, porque $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=12 \neq 0$ y r(A) = 2

Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 6$ el Sistema es Compatible Determinado, ya que r(A)=3=r(A')

b) Para $\lambda=0$ hemos visto que el sistema es Compatible Indeterminado, lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} 3x \quad =0 \\ x \quad =0 \\ x+y+3z=1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=1-3z \end{array}\right\} \to sol: \begin{cases} x=0 \\ y=1-3t \\ z=t \end{cases}$$

4. P(1,0,0) ; $r \equiv x-3=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$; $s \equiv (x,y,z)=(1,1,0)+\lambda(-1,2,0)$

a) Ponemos las dos rectas en paramétricas, para estudiar la posición:

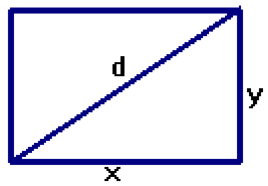
$$r \equiv \begin{cases} x=3+\mu \\ y=2\mu \\ z=-1-2\mu \end{cases} ;\ s \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=0 \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} 3+\mu=1-\lambda \\ 2\mu=1+2\lambda \\ -1-2\mu=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \mu+\lambda=-2 \\ 2\mu-2\lambda=1 \\ \mu=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

$\left.\begin{array}{l} \lambda=-2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2} \\ -2\lambda=1+1 \end{array}\right\}$ Incompatible, vectores de dirección: $\begin{cases} \vec{d}(1,2,-2) \\ \vec{e}(-1,2,0) \end{cases}$ no paralelos, luego las rectas r y s se cruzan.

b) Plano que pasa por P(1,0,0) y direcciones de las dos rectas (paralelo)

$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -4x+4-2z-2z-2y=0 \Rightarrow 2x+y+2z-2=0$ es el plano pedido.

OPCIÓN B



1. Área 16 cm^2, diagonal mínima

$A = x \cdot y = 16 \rightarrow y = \dfrac{16}{x}$, $d^2 = x^2 + y^2$

La función de la que hay que hallar el mínimo es, por tanto:

$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{x^4+256}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{x^4+256}}{x}$, derivamos:

$$d'(x) = \dfrac{\dfrac{4x^3 \cdot x}{2\sqrt{x^4+256}} - \sqrt{x^4+256}}{x^2} = \dfrac{4x^4 - 2(x^4+256)}{2x^2\sqrt{x^4+256}} = \dfrac{x^4-256}{x^2\sqrt{x^4+256}} = 0$$

$x^4 = 256 \Rightarrow x = \sqrt[4]{256} = 4$ (sólo sirve la raíz positiva, ya que es una longitud), comprobemos si es mínimo para x = 4

Si $x < 4 \rightarrow d'(x) < 0 \rightarrow$ d es decreciente; Si $x > 4 \rightarrow d'(x) > 0 \rightarrow$ d es creciente, luego en x = 4 tiene un mínimo. $y = \dfrac{16}{x} = \dfrac{16}{4} = 4$

Dimensiones del rectángulo de menor diagonal 4 cm x 4 cm (es decir, un cuadrado de lado 4 cm)

2. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}dx = \int \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{4}{4}-\frac{9}{4}x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}x^2\right)^2}}dx = \frac{1}{2\cdot 3}\int \frac{3xdx}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}x^2\right)^2}} =$

hacemos el cambio de variable $t = \dfrac{3}{2}x^2 \rightarrow dt = 3xdx$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{6}\text{arcsen}(t) + C = \frac{1}{6}\text{arcsen}\left(\frac{3}{2}x^2\right) + C = F(x)$$

Sabemos que F(0)= $3 \rightarrow \dfrac{1}{6}\text{arcsen}0 + C = 3 \rightarrow \dfrac{1}{6}(0+2k\pi) + C = 3$

$C = 3 - \dfrac{2k\pi}{6}$ para k =0, la primitiva pedida es $F(x) = \dfrac{1}{6}\text{arcsen}\left(\dfrac{3}{2}x^2\right) + 3$

3. $AX - B^t = 2C \Rightarrow AX = 2C + B^t \Rightarrow X = A^{-1}\left(2C + B^t\right)$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow 2C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1-2+1+4 = 4;\ A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\left(2C + B^t\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

4. $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y - 3 \\ y - 3 + y - z - 1 = 0 \\ z = 2y - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$ $P(-3,0,-4)$, $\vec{d}(1,1,2)$

$s \equiv \begin{cases} 2y + 1 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = -3 + 2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2s \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = s \end{cases}$ $Q(-3,-\frac{1}{2},0)$, $\vec{e}(2,0,1)$

a) Plano que contiene a r y es paralelo a s:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y & z+4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 3 + 4y - 2z - 8 - y = 0 \rightarrow x + 3y - 2z - 5 = 0$$

b) ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s?

Vamos a intentar hallarlo, tomamos el haz de planos que pasa por y de esos escogeremos el que sea perpendicular a s (si lo hay), es decir el que su vector normal sea $\vec{e}(2,0,1)$ o paralelo

Haz de planos: $(x + y - z - 1) + \lambda(x - y + 3) = 0 \rightarrow (1+\lambda)x + (1-\lambda)y - z - 1 + 3\lambda = 0$

$(1+\lambda, 1-\lambda, -1) // (2,0,1) \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = -2 \\ 1 - \lambda = 0 \\ -1 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = 1 \end{cases}$ imposible, luego no existe un plano que cumpla esas condiciones.