| | | |
|---|---|---|
| Universidades Públicas de Andalucía | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD | **MATEMÁTICAS II** |

**Instrucciones:**

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Puedes usar calculadora científica **(no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos)**, pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Dada la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en su punto de inflexión.

**Ejercicio 2.-** Sean $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x)=x^3-4x \qquad \text{y} \qquad g(x)=3x-6$$

**(a) [0'75 puntos]** Determina los puntos de corte de las gráficas de $f$ y $g$.

**(b) [1'75 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

**Ejercicio 3.-** Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rl} x+y & =1 \\ ky+z & =0 \\ x+(k+1)y+kz & =k+1 \end{array}\right\}$$

**(a) [1'25 puntos]** Determina el valor del parámetro $k$ para que sea incompatible.

**(b) [1'25 puntos]** Halla el valor del parámetro $k$ para que la solución del sistema tenga $z=2$.

**Ejercicio 4.-** Considera la recta $r$ definida por $\left\{\begin{array}{rl} x & =0 \\ 3y+z & =3 \end{array}\right.$

y la recta $s$ definida por $\left\{\begin{array}{rl} 2x-z & =3 \\ y & =0 \end{array}\right.$

**(a) [1 punto]** Estudia la posición relativa de $r$ y $s$.

**(b) [1'5 puntos]** Halla la ecuación general de un plano que contiene a $s$ y es paralelo a $r$.

| | | |
|---|---|---|
| | **UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA**<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD | **MATEMÁTICAS II** |

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.<br>b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.<br>c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.<br>d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.<br>e) Puedes usar calculadora científica **(no programable, sin pantalla gráfica y sin capacidad para almacenar, transmitir o recibir datos)**, pero todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |

## Opción B

---

**Ejercicio 1.-** Sea la función $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ c\,x + 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

**(a)** [**2 puntos**] Determina $a$, $b$ y $c$ sabiendo que $f$ es continua en el intervalo cerrado $[0,4]$, derivable en el intervalo abierto $(0,4)$ y que $f(0) = f(4)$.

**(b)** [**0'5 puntos**] ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

---

**Ejercicio 2.-** [**2'5 puntos**] Calcula

$$\int_0^1 x\,\ln(x+1)\,dx$$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

---

**Ejercicio 3.-** [**2'5 puntos**] Halla los valores del parámetro $m$ que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} -x + 2y - 2z & = 2 \\ 2x + y + z & = m \\ x + 3y - z & = m^2 \end{array}\right\}$$

---

**Ejercicio 4.-** [**2'5 puntos**] Sea la recta $r$ definida por $\left\{\begin{array}{rl} x & = 1 \\ x - y & = 0 \end{array}\right.$

y sean los planos $\pi_1$, de ecuación $x + y + z = 0$, y $\pi_2$, de ecuación $y + z = 0$. Halla la recta contenida en el plano $\pi_1$, que es paralela al plano $\pi_2$ y que corta a la recta $r$.

---

# SOLUCIONES MODELO 4 2007-2008

## OPCIÓN A

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$ recta tangente en su punto de inflexión

Hallemos el punto de inflexión:

$$f'(x)=\frac{e^x-(x+1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-xe^x}{(e^x)^2}=-\frac{x}{e^x}$$

$$f''(x)=\frac{-e^x+xe^x}{(e^x)^2}=\frac{(x-1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{x-1}{e^x}=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$$

Si $x<1\Rightarrow f''(x)<0\to\cap$ y $x>1\Rightarrow f''(x)>0\to\cup$

Por tanto tenemos un punto de inflexión en $\left(1,\dfrac{2}{e}\right)$, y $f'(1)=-\dfrac{1}{e^1}=-\dfrac{1}{e}$

Recta tangente: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\to y-\dfrac{2}{e}=-\dfrac{1}{e}(x-1)\to y=-\dfrac{1}{e}x+\dfrac{3}{e}$

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\ f(x)=x^3-4x$, $g(x)=3x-6$

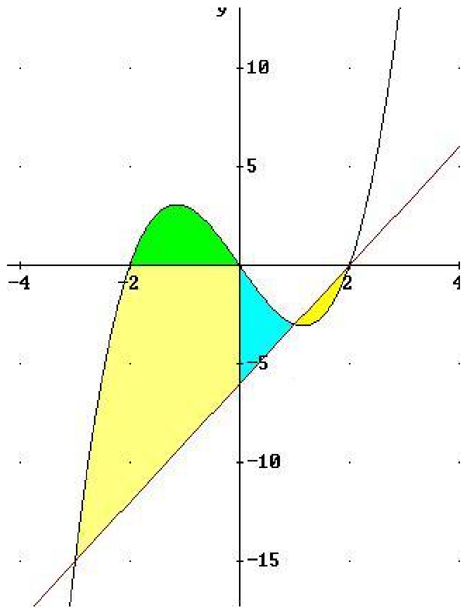
a) puntos de corte $x^3-7x+6=0$

factorizando (Ruffini):

$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)=0$

Se cortan en tres puntos:

(1,–3), (2,0) y (–3,–15)




Hagamos un esbozo de la gráfica, la función f corta a los ejes en:

$x^3-4x=0\Rightarrow x(x^2-4)=0\Rightarrow x=0,\ x=\pm 2$

Hay que hallar el área de la zona amarilla($A_1$):

$$A_1=\left|\int_1^2(x^3-4x)dx-\int_1^2(3x-6)dx\right|$$

$$\int_1^2(x^3-4x)dx=\left.\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_1^2=\frac{9}{4}$$

$$\int_1^2(3x-6)dx=\left.\frac{3x^2}{2}-6x\right]_1^2=-\frac{3}{2}\quad\to A_1=\left|-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\right|=\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}u^2$$

Beig: $A_2=\left|\int_{-3}^{0}(3x-6)dx-\int_{-3}^{-2}(x^3-4x)dx\right|=\left|\left.\dfrac{3x^2}{2}-6x\right]_{-3}^{0}-\left.\dfrac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-3}^{-2}\right|=\dfrac{155}{4}u^2$

Área azul: $A_3=\left|\int_0^1(3x-6)dx-\int_0^1(x^3-4x)dx\right|=\dfrac{9}{4}u^2$

Área verde: $A_4=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx=4$

Área pedida: $A=\dfrac{3}{4}+\dfrac{155}{4}+\dfrac{9}{4}+4=\dfrac{183}{4}u^2$

3. $\left.\begin{array}{l} x+y \qquad =1 \\ \quad ky+z=0 \\ x+(k+1)y+kz=k+1 \end{array}\right\} A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k \end{pmatrix},\ A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k & k+1 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k \end{vmatrix}=k^2-k \to k^2-k=0 \Rightarrow k=0, \quad k=1$$

Para k = 0 $\to A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dos filas iguales, r(A') = 2 = r(A) , Compatible Ind

Para k = 1 $\to A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , r(A) = 2 , veamos el rango de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2-1\neq 0 \to r(A')=3$ Sistema Incompatible

Para $k\neq 0$ y $k\neq 1 \to r(A)=r(A')=3 \to$ Sistema Compatible Determinado

Luego, el sistema es incompatible para k = 1

b) Halla k para que la solución del sistema tenga z = 2

$$\left.\begin{array}{l} x+y \qquad =1 \\ \quad ky+2=0 \\ x+(k+1)y+2k=k+1 \end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} y=1-x \\ ky=-2 \\ x+(k+1)y=1-k \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} k(1-x)=-2 \\ x+(k+1)(1-x)=1-k \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} k=-\dfrac{2}{1-x} \\ x+k+1-kx-x=1-k \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} k=\dfrac{2}{x-1} \\ k(2-x)=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} k=0 \\ 2-x=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=2 \\ k=\dfrac{2}{2-1}=2 \end{array}\right\}$$

Para k = 2 la solución del sistema tiene z = 2 (Para k = 0, el sistema era compatible indeterminado)

4. $r\equiv\begin{cases} x=0 \\ 3y+z=3 \end{cases} \quad s\equiv\begin{cases} 2x-z=3 \\ y=0 \end{cases}$ a) Posición relativa

$$r\equiv\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=3-3t \end{cases} \quad s\equiv\begin{cases} x=s \\ y=0 \\ z=-3+2s \end{cases} \to \left.\begin{array}{l} 0=s \\ t=0 \\ 3-3t=-3+2s \end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} s=0 \\ t=0 \\ 3t+2s=6 \end{array}\right\} \text{incompatible}$$

vectores de dirección: de r $\to \vec{d}(0,1,-3)$ , de s $\to \vec{e}(1,0,2)$ que no son paralelos, luego las rectas se cruzan.

b) Plano que contiene a r y es paralelo a s: P(0,0,3) (punto de r)

$$\begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \to 2x-3y-z+3=0$$

**OPCIÓN B**

1. $f:[0,4]\to R$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si \quad 0\le x<2 \\ cx+1 & si \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$

a) Determina a y b, sabiendo que es continua en $[0,4]$, derivable en (0,4) y que f(0)=f(4)

$f(0)=0+b=f(4)=4c+1 \Rightarrow b=4c+1$

Continua y derivable en cada trozo (funciones polinómicas), también tiene que serlo en x = 2

Continuidad: $\begin{cases} f(2)=2c+1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+ax+b\right)=4+2a+b \to 2c+1=4+2a+b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(cx+1)=2c+1 \end{cases}$

Derivabilidad: $\begin{cases} f'(2^-)=2\cdot 2+a \\ f'(2^+)=c \end{cases} \to 4+a=c$

Tendremos que resolver el sistema: $\left.\begin{matrix} b=4c+1 \\ 2c+1=4+2a+b \\ 4+a=c \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} b=4c+1 \\ a=c-4 \end{matrix}\right\}$ sustituimos

$2c+1=4+2(c-4)+4c+1 \Rightarrow 2c+1=4+2c-8+4c+1 \Rightarrow 4c=4 \Rightarrow c=1$

$b=4c+1=5$; $a=c-4=-3$. Solución: $a=-3, b=5, c=1$

b) ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+5 & si \quad 0\le x<2 \\ x+1 & si \quad 2\le x\le 4 \end{cases} \to f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad 0\le x<2 \\ 1 & si \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$

$2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ es el punto del intervalo donde se anula la derivada

2. Calcula $\int_0^1 x\ln(x+1)dx$, hacemos esta integral por partes:

$$\int x\ln(x+1)dx=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}dx=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)x-1}{x+1}dx=(*)$$

$\left.\begin{matrix} u=\ln(x+1) \\ dv=xdx \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} du=\frac{dx}{x+1} \\ v=\frac{x^2}{2} \end{matrix}\right\}$ dividimos $x^2$ entre $x+1$ y tenemos cociente x y resto –1

$$(*)=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int xdx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln(x+1)=$$

$$=\frac{x^2+1}{2}\ln|x+1|-\frac{x^2}{4}+C$$

$$\int_0^1 x\ln(x+1)dx=\left[\frac{x^2+1}{2}\ln|x+1|-\frac{x^2}{4}\right]_0^1=\ln 2-\frac{1}{4}-0=\ln 2-\frac{1}{4}$$

3. Halla los valores de m que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} -x+2y-2z=2 \\ 2x+y+z=m \\ x+3y-z=m^2 \end{array}\right\} A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},\ A'=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & 3 & -1 & m^2 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$, pero $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$, luego r(A) = 2. Veamos el rango de la ampliada:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix}=-m^2+2m+12-2+3m-4m^2=-5m^2+5m+10=0$$

$m^2-m-2=0 \Rightarrow m=\left\langle\begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array}\right.$ para estos dos valores de m es r(A') = 2 = r(A), es decir el sistema es compatible indeterminado (O sea la respuesta es m = -1, m = 2)

Ya que para $m\neq -1$ y $m\neq 2$ r(A')=3 y el sistema es incompatible

4. $r\equiv\begin{cases} x=1 \\ x-y=0 \end{cases}$. $\pi_1\equiv x+y+z=0$, $\pi_2\equiv y+z=0$ Halla la recta contenida en el plano $\pi_1$, es paralela al plano $\pi_2$ y corta a la recta r. Para que esta recta exista, la recta r tiene que cortar al plano $\pi_1$, hallemos el punto de corte:

$$r\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases} \rightarrow 1+1+t=0 \Rightarrow t=-2 \rightarrow P(1,1,-2)$$ es el punto de corte de ambas rectas

Ya tenemos un punto de la recta buscada, necesitamos el vector de dirección, que será perpendicular a los vectores normales de ambos planos, con lo que haciendo su producto vectorial lo tendremos: $\vec{n}_1(1,1,1),\quad \vec{n}_2(0,1,1)\rightarrow \vec{d}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(0,-1,1)$

Recta pedida: $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=-2+t \end{cases}$